

10-1 重积分的概念与性质

第十章 多元积分学

张振



厦门大学嘉庚学院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

- 1 重积分的概念
- 2 重积分的性质
- 3 强化例题与方法论

从面积到体积的跨越

PART 1

几何定义:

- **底面**: xy 平面上的闭区域 D 。
- **侧面**: 垂直于 xy 平面的柱面。
- **顶面**: 连续曲面 $z = f(x, y) \geq 0$ 。

求解逻辑: 如果底面面积为 A , 高恒为 h , 则 $V = Ah$ 。但现在高度 $f(x, y)$ 随位置变化, 如何计算?

物理比喻

变密度薄片的质量

设一个平面薄片占据区域 D , 其面密度为 $\rho(x, y)$, 求薄片的总质量 M 。这与求体积在数学结构上是完全一致的: 都是求一个分布量的累加总和。



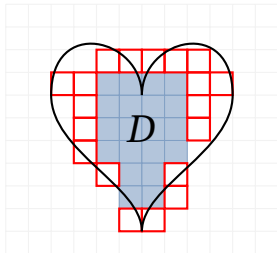
- 1. 分割 (Partition): 将区域 D 分成 n 个直径极小的区域 $\Delta\sigma_i$ 。
- 2. 近似 (Approximation): 在每块内任取一点 (ξ_i, η_i) , $\Delta V_i \approx f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$ 。
- 3. 求和 (Sum): 累加所有微元的体积:
$$V \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$
- 4. 极限 (Limit): 令分割的最大直径 $\lambda \rightarrow 0$, 得到精确值。

思想精髓

以直代曲, 以不变代变

在极小的范围内, 复杂的曲面可以近似看作平整的平面; 在极小的面积上, 变动的函数值可以近似看作常数。这就是微积分征服世界的武器。

- 如何精确衡量爱？
- 当你的另一半想精确知道你有多爱她/他时，最好的办法是“割碎”你的心。
- **数学原理：**心形区域越割越碎，每个小块的面积误差就越小，叠加后的答案才越精确。



$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

可积性结论 (工科适用版):

- 连续必可积: 若 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上连续, 则必可积。
- 良性不连续点: 若 $f(x, y)$ 有界, 且只在有限条光滑曲线上不连续, 则亦可积。

注: 在本课程中, 我们处理的几乎所有函数和区域都是可积的。

计算的理论基石

PART 2

- 性质 1 (线性): 常数可提出, 加法可拆分。

$$\iint_D [\alpha f + \beta g] d\sigma = \alpha \iint_D f d\sigma + \beta \iint_D g d\sigma$$

- 性质 2 (区域可加性): 若 $D = D_1 \cup D_2, D_1 \cap D_2 = \partial D_{12}$, 则:

$$\iint_D f d\sigma = \iint_{D_1} f d\sigma + \iint_{D_2} f d\sigma$$

注意: 注意

区域可加性是我们将复杂区域“分块计算”的法律依据。

- 性质 3 (面积性质): $\iint_D 1 \, d\sigma = \sigma(D)$ (区域 D 的面积)。
- 性质 4 (比较性): 若 $f \leq g$, 则积分值也满足相应不等式。
- 性质 5 (绝对值性质): $|\iint_D f \, d\sigma| \leq \iint_D |f| \, d\sigma$ 。
- 性质 6 (中值定理): $\exists (\xi, \eta) \in D$, 使 $\iint_D f \, d\sigma = f(\xi, \eta) \cdot \sigma(D)$ 。

判定逻辑 A: 奇偶对称性

- 前提: 区域 D 关于 L 轴对称。
- 结论: 若被积函数 f 关于该轴为奇函数, 则积分为 0。

判定逻辑 B: 轮换对称性

- 前提: 区域 D 关于直线 $y = x$ 对称。
- 结论:
$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(y, x) d\sigma = \frac{1}{2} \iint_D [f(x, y) + f(y, x)] d\sigma.$$

从理论到解题的跳跃

PART 3

题:变式练习

■ 计算 $I = \iint_D (x \cos y + y^2 \sin x + e^{x^2+y^2}) d\sigma$, 其中 D 是单位圆 $x^2 + y^2 \leq 1$ 。

解析步解:

- 第一项: $x \cos y$ 关于 x 是奇函数, 而 D 关于 y 轴 ($x = 0$) 对称, 故积分为 0。
- 第二项: $y^2 \sin x$ 关于 x 也是奇函数, 同理积分为 0。
- 第三项: $e^{x^2+y^2}$ 是偶函数, 必须计算。

$$I = 0 + 0 + \iint_D e^{x^2+y^2} d\sigma$$

注: 由于本节侧重性质, 此处先保留积分式。利用性质快速排除零项是核心技巧。

题:体积计算

■ 计算 $I = \iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2} \, d\sigma$, 其中 $D : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0$ 。

解析步解:

1. 观察函数: $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 。
2. 几何直观: 这表示一个球心在原点, 半径 $R = 2$ 的球面。
3. 观察区域: D 是半径为 2 的右半圆。
4. 结论: 该积分表示一个半径为 2 的球体的 $1/4$ (因为只取了右半部分)。

$$I = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{4}{3} \pi \cdot 2^3 \right) = \frac{8\pi}{3}$$

题:大小判定

- 设 D 为单位圆, $I = \iint_D \ln(1 + x^2 + y^2) d\sigma$, $J = \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma$, $K = \iint_D \sin(x^2 + y^2) d\sigma$, 比较 I, J, K 的大小。

解析步解:

1. 令 $t = x^2 + y^2$, 在 D 上 $t \in [0, 1]$ 。
2. 比较三个一元函数: $f(t) = \ln(1 + t)$, $g(t) = t$, $h(t) = \sin t$ 。
3. 利用泰勒展开或导数工具可知: 当 $t \in (0, 1]$ 时,

$$\ln(1 + t) < \sin t < t$$

4. 根据积分比较性质, 函数的大小顺序直接决定积分的大小。

$$I < K < J$$

题:极限模型

求 $\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{x^2+y^2 \leq r^2} \sqrt{4-x^2-y^2} d\sigma$ 。

解析步解:

1. **应用中值定理:** 被积函数 $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 在闭区域 D_r 上连续。由二重积分中值定理, 在 D_r 内至少存在一点 (ξ, η) , 使:

$$\iint_{D_r} \sqrt{4 - x^2 - y^2} d\sigma = f(\xi, \eta) \cdot \sigma(D_r) = \sqrt{4 - \xi^2 - \eta^2} \cdot \pi r^2$$

2. **化简极限式:** 将上式代入原极限中:

$$\text{原式} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{4 - \xi^2 - \eta^2} \cdot \pi r^2}{\pi r^2} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \sqrt{4 - \xi^2 - \eta^2}$$

3. **趋向判定:** 当 $r \rightarrow 0^+$ 时, 区域 D_r 向原点收缩。由于 $(\xi, \eta) \in D_r$, 故 $(\xi, \eta) \rightarrow (0, 0)$ 。

$$\text{原式} = \sqrt{4 - 0^2 - 0^2} = 2$$

题:估值问题

- 估算 $|\iint_D (x - y) \cos(x^2 + y^2) d\sigma|$ 的最大可能值,其中 D 为矩形 $[0, 1] \times [0, 1]$ 。

解析步解:

1. 利用性质: $|\iint f| \leq \iint |f|$ 。
2. 被积函数绝对值: $|x - y| \cdot |\cos(x^2 + y^2)| \leq |x - y| \cdot 1$ 。
3. 在 D 上, $|x - y| \leq 1$ 。
4. 故: $|I| \leq \iint_D 1 \, d\sigma = 1 \cdot 1 = 1$ 。

题:课内练习

设 D 为由 $y = x^2$ 与 $y = 1$ 围成的区域, 则 $\iint_D (x + y^2) d\sigma$ 等于:

- (A) $2 \iint_{D, x>0} x d\sigma$
- (B) $2 \iint_{D, x>0} y^2 d\sigma$
- (C) 0
- (D) $\iint_D y^2 d\sigma$



解析：

- 区域 D 关于 y 轴对称。
- x 是奇函数 $\implies \iint_D x \, d\sigma = 0$ 。
- y^2 是偶函数 $\implies \iint_D y^2 \, d\sigma = 2 \iint_{D, x>0} y^2 \, d\sigma$ 。

故选 **B** 或等效的表达。



■ 题: 课内练习

设 $D: x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$, 已知 $\iint_D x \, d\sigma = \frac{1}{3}$, 则 $\iint_D y \, d\sigma = \underline{\quad}$ 。



解析:

- 区域 D 是第一象限内的 $1/4$ 圆, 关于 $y = x$ 对称。
- 利用轮换对称性: 将 x, y 互换, 积分值不变。

$$\iint_D y \, d\sigma = \iint_D x \, d\sigma = \frac{1}{3}$$



1. **一看区域**: 是否有轴对称(奇偶性)或 $y = x$ 对称(轮换性)。
2. **二看被积函数**: 是否含奇函数项? 是否含 $x^2 + y^2$?
3. **三看几何图形**: 是否能直接写出面积(如圆、矩形)或体积(如半球)。

得分点提醒

考试中, 若看到被积函数非常复杂, 通常 90% 的概率可以用对称性直接化简为 0。

- **理论根基**: 四步走(分割、近似、求和、极限)。
- **计算前提**: 线性、叠加、比较、中值。
- **核心武器**: 奇偶对称性(必杀技)、轮换对称性。
- **几何直观**: 重积分 = 曲顶柱体体积 = 变密度薄片质量。

下节预告: 二重积分的计算