

10-2二重积分的计算

第十章 多元积分学

张振



厦门大学嘉庚学院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

- 1 直角坐标系下的计算
- 2 极坐标系下的计算
- 3 应用:几何图形的面积计算
- 4 综合技巧与计算策略
- 5 总结:坐标系的选择策略

化二重积分为累次积分

PART 1

- **核心目标:** 计算曲顶柱体的体积 $V = \iint_D f(x, y) d\sigma$ 。
- **逻辑拆解 (Reduction strategy):**
 1. **微元体积:** 在 x 轴固定点 x , 切下的薄片体积为 $dV = A(x) dx$ 。
 2. **截面积:** 该薄片的截面积为一元积分 $A(x) = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy$ 。
 3. **总体积:** 将所有微元沿 x 轴累加(积分): $V = \int_a^b A(x) dx$ 。

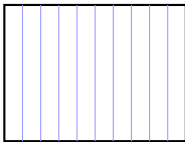
推导结论

将 $A(x)$ 代入总体积公式, 即得:

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

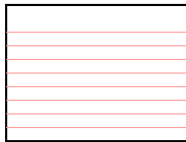
这种先对 y 、后对 x 进行的积分形式称为 **累次积分** (Iterated Integral)。

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy$$



先积 y (定 x)

$$\int_a^b dx \int_c^d f \, dy$$



先积 x (定 y)

$$\int_c^d dy \int_a^b f \, dx$$

■ 题:为何要“看人下菜碟”?

计算 $\iint_R x \cos(xy) d\sigma$, 其中 $R = [0, \pi] \times [0, 1]$ 。

路径 A: 先对 x 积分

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^\pi x \cos(xy) dx \right) dy$$

需使用 分部积分法:

$$\int x d\left(\frac{\sin xy}{y}\right) = \dots$$

过程极其繁琐, 容易出错。

路径 B: 先对 y 积分

$$I = \int_0^\pi \left(\int_0^1 x \cos(xy) dy \right) dx$$

直接积分 (x 看作常数):

$$I = \int_0^\pi [\sin(xy)]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^\pi \sin x dx$$

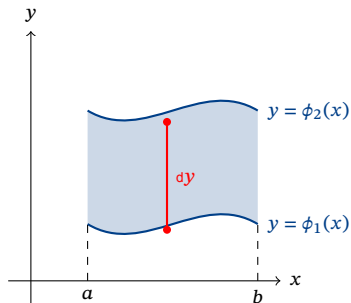
结果: $I = 2$

结论: 选对次序, 事半功倍!

1.2 切片艺术:两种视角的对比



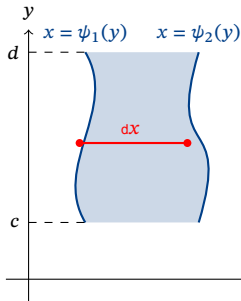
视角 A: 先对 y 积分 (X 型)



累次积分:

$$\int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \dots dy \right) dx$$

视角 B: 先对 x 积分 (Y 型)



累次积分:

$$\int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \dots dx \right) dy$$

x 型区域 (垂直切割):

$$I = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

特征:上下边界是函数,左右边界是直线。

y 型区域 (水平切割):

$$I = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

特征:左右边界是函数,上下边界是直线。

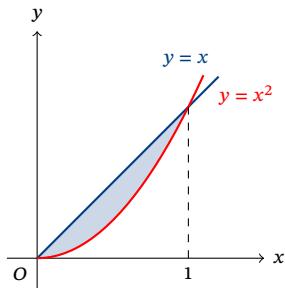
决策逻辑

优先选择能用一条函数线表示边界的方向。如果一个方向需要分多段,则考虑换另一个方向。



题: 基础练兵

计算 $\iint_D (x + y) d\sigma$, 其中 D 是由 $y = x^2$ 与 $y = x$ 所围成的区域。



解析步解:

1. 找交点: 解 $x^2 = x \implies x = 0, x = 1$ 。
2. 定上下限: $0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x$ 。
3. 列式计算:

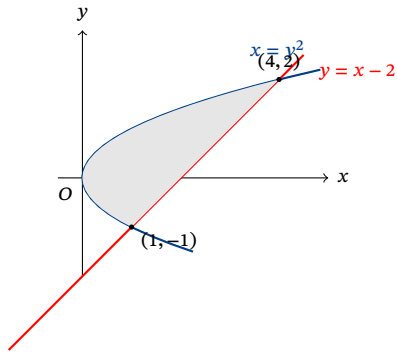
$$I = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^x (x+y) dy \right) dx$$

$$I = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^2 - x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right) dx = \frac{3}{20}$$



题: 决策练习

计算 $\iint_D y \, d\sigma$, 其中 D 是由 $y = x - 2$ 与 $x = y^2$ 所围成的区域。



■ **方案 A (X 型):** 需在 $x = 1$ 处分块。下边界由 $y = -\sqrt{x}$ 变为 $y = x - 2$ 。

■ **方案 B (Y 型):** 解交点

$$y^2 = y + 2 \implies y = 2, -1. \text{ 范围: } -1 \leq y \leq 2, y^2 \leq x \leq y + 2.$$

结论: 对于此区域, Y 型积分只需要一个累次积分:

$$I = \int_{-1}^2 dy \int_{y^2}^{y+2} y dx = \int_{-1}^2 (2y + y^2 - y^3) dy = \frac{9}{4}$$

■ 题:中级挑战

设 D 是由 $y = 2, y = x, y = 2x$ 所围成的区域。计算 $\iint_D (x^2 + y^2 - x) d\sigma$ 。

提示:

- **X 型**: 需在 $x = 1$ 处分块 (左侧上边界 $2x$, 右侧上边界 2)。
- **Y 型**: $0 \leq y \leq 2, \frac{y}{2} \leq x \leq y$ 。无需分块!



解析步骤:

1. 定限: $0 \leq y \leq 2, y/2 \leq x \leq y$ 。

2. 列式:

$$I = \int_0^2 dy \int_{y/2}^y (x^2 + y^2 - x) dx$$

3. 积出:

$$I = \int_0^2 \left(\frac{19}{24}y^3 - \frac{3}{8}y^2 \right) dy = \frac{13}{6}$$



题: 强化应用

计算 $I = \iint_D y \, d\sigma$, 其中 D 是由 $y = e^x$, $y = 1$ 及 $x = 1$ 所围成的区域。

解析步解:

1. 定限: $0 \leq x \leq 1$ (从 $y = 1$ 与 $y = e^x$ 交点 $x = 0$ 到直线 $x = 1$)。
2. 上下界: 对于固定的 x , y 从下界 1 到上界 e^x 。
3. 计算:

$$I = \int_0^1 dx \int_1^{e^x} y dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_1^{e^x} dx$$
$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 (e^{2x} - 1) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} e^{2x} - x \right]_0^1 = \frac{1}{4} (e^2 - 3)$$



题: 基础练兵

计算 $I = \iint_D x^2 y \, d\sigma$, 其中 D 是顶点为 $(0, 0), (1, 0), (1, 1)$ 的三角形。

方案对比:

■ X 型: $\int_0^1 dx \int_0^x x^2 y dy = \int_0^1 \frac{1}{2} x^4 dx = 1/10。$

■ Y 型: $\int_0^1 dy \int_y^1 x^2 y dx = \int_0^1 \frac{1}{3} y(1 - y^3) dy = 1/10。$

注意: 结论

对于边界均为直线的区域, 直角坐标系 (X 型/Y 型) 最为简便。极坐标反而会引入三角函数, 增加难度。

极坐标：旋转的艺术

PART 2

- 切片方式:不再沿轴平移,而是绕原点**旋转射线**。
- 定位置:固定角度 θ ,切下一个扇形窄片。
- 求面积:截面长度沿 r 从 $r_1(\theta)$ 到 $r_2(\theta)$ 。

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot r dr \right) d\theta$$

定理:二重积分换元公式

设变换 $x = x(u, v), y = y(u, v)$ 将 uv 平面区域 D' 一一映射为 xy 平面区域 D , 且导数连续, 则:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

其中 $J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ 为坐标变换的 **Jacobian 行列式**。

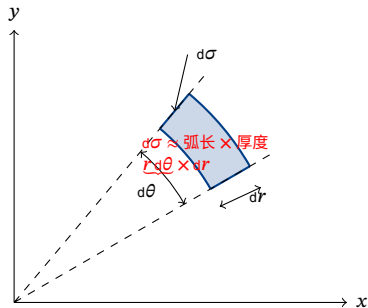
极坐标换元公式

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

其中 D^* 是 D 在极坐标下的表示。

■ **注意:** 直角坐标系下面积元对应 $dx dy$; 极坐标下面积元对应 $r dr d\theta$ 。

2.4 几何直观:极坐标面积元为什么多个 r ?



- **弧长补偿:**扇环的内径和外径不同, 弧长与半径 r 成正比。
- **物理直观:**越远离原点, 同样的 $d\theta$ 扫过的面积越大。
- **结论:**

$$d\sigma = r dr d\theta$$

■ 题:思考:直接代换可以吗?

计算单位圆 D 上的积分 $I = \iint_D (1 - x^2 - y^2) d\sigma$ 。

错误做法 (Wrong)

直接写 $dr d\theta$:

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (1 - r^2) dr \right) d\theta = \frac{4\pi}{3}$$

结果偏大!

正确做法 (Right)

补偿面积元 r :

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (1 - r^2) r dr \right) d\theta = \frac{\pi}{2}$$

这才是真正的体积。



- 圆心在 $(a, 0)$: $(x - a)^2 + y^2 = a^2 \implies r = 2a \cos \theta$ 。
- 圆心在 $(0, a)$: $x^2 + (y - a)^2 = a^2 \implies r = 2a \sin \theta$ 。
- 判定范围:
 - $r = 2a \cos \theta$ 在第一、四象限, $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ 。
 - $r = 2a \sin \theta$ 在第一、二象限, $\theta \in [0, \pi]$ 。



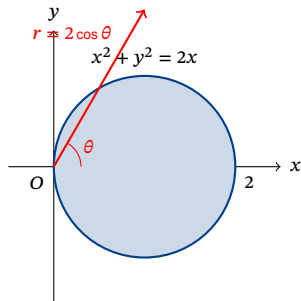
题: 极坐标应用

■ 计算 $I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma$, 其中 D 是圆 $x^2 + y^2 \leq 2x$ 。



解析步解:

1. 坐标变换: $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, d\sigma = r dr d\theta$ 。
2. 区域表示: $r^2 \leq 2r \cos \theta \implies 0 \leq r \leq 2 \cos \theta$ 。
3. 角度范围: 因为 $r \geq 0$, 需 $\cos \theta \geq 0 \implies \theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ 。



极坐标转换要点:

- 圆心 $(1, 0)$, 半径 1。
- 方程:
$$r^2 = 2r \cos \theta \implies r = 2 \cos \theta.$$
- 范围: 由于圆在 y 轴右侧, 角度 $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ 。
- 射线从原点出发, 穿过区域的长度随 θ 变化。



解析步解:

4. 列式:

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{2\cos\theta} r^2 dr \right) d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{8}{3} \cos^3 \theta d\theta$$

5. 计算:

$$I = \frac{16}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta d\theta = \frac{16}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{9}$$

题:技巧:从 y/x 到 $\arctan(y/x)$

计算 $I = \iint_D f(x, y) d\sigma$, 其中 $D : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x$ 。针对以下两种被积函数分别讨论: (1) $f(x, y) = \frac{y}{x} = \tan \theta$ (2) $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x} = \theta$

解析要点:

1. 区域: 圆环在第一象限, $0 \leq \theta \leq \pi/4, 1 \leq r \leq 2$ 。
2. 计算 (1): $I_1 = \int_0^{\pi/4} \tan \theta \, d\theta \int_1^2 r \, dr = \frac{3}{4} \ln 2$ 。
3. 计算 (2): $I_2 = \int_0^{\pi/4} \theta \, d\theta \int_1^2 r \, dr = \left[\frac{1}{2}\theta^2\right]_0^{\pi/4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3\pi^2}{64}$ 。

核心价值: 极坐标不仅能简化区域 D , 更能通过变量代换将复杂的二元函数转化为简单的一元函数乘积。



题:课内练习

将 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 化为极坐标, 其中 $D: x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$ 。

解析要点:

1. 确定 θ 范围: 由于在第一象限, 故 $0 \leq \theta \leq \pi/2$ 。
2. 确定 r 范围: 边界 $x + y = 1 \implies r \cos \theta + r \sin \theta = 1$ 。

$$r = \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}$$

3. 结论:

$$I = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot r \, dr$$

利用二重积分求平面图形面积

PART 3



题:几何应用

■ 利用二重积分计算椭圆 $D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ 的面积 A 。

解析步解:

1. 变换: 令 $x = ar \cos \theta, y = br \sin \theta$ 。

2. Jacobian: $J = \begin{vmatrix} a \cos \theta & -ar \sin \theta \\ b \sin \theta & br \cos \theta \end{vmatrix} = abr$ 。

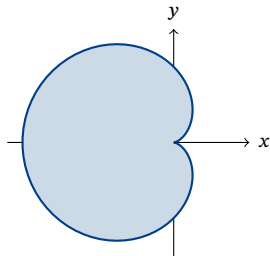
3. 计算: $A = \iint_D 1 \, d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 abr \, dr = 2\pi \cdot \frac{1}{2}ab = \pi ab$ 。

■ 题: 心脏线 (Cardioid)

求曲线 $r = a(1 - \cos \theta)$ 所围图形的面积 ($a > 0$)。

计算步骤:

$$\begin{aligned} A &= \iint_D 1 \, d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a(1-\cos\theta)} r \, dr \\ &= \frac{1}{2} a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta) \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} a^2 (2\pi - 0 + \pi) = \frac{3}{2} \pi a^2 \end{aligned}$$



分块、换序与策略选择

PART 4

- 挑战 1:边界不连续 $\implies$ 分块处理。
- 挑战 2:原函数不可求 $\implies$ 交换次序。

本质上,这些技巧都是为了寻找一条阻力最小的切片路径。

1. 区域可加性:

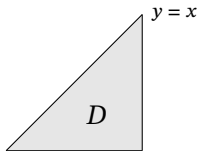
若 $D = D_1 \cup D_2$, 且无公共内点:

$$\iint_D f \, d\sigma = \iint_{D_1} f \, d\sigma + \iint_{D_2} f \, d\sigma$$

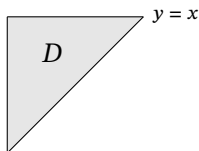
2. 视角一致性:

交换次序结果不变:

$$\int_a^b dx \int_{\phi_1}^{\phi_2} f \, dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1}^{\psi_2} f \, dx$$



$$\int_0^a dx \int_0^x f dy = \int_0^a dy \int_y^a f dx$$



$$\int_0^a dx \int_x^a f dy = \int_0^a dy \int_0^y f dx$$

口诀: 下限对角线 $\leftrightarrow$ 上限常数; 上限对角线 $\leftrightarrow$ 下限常数。



题:分块技巧

计算 $\iint_D f(x, y) d\sigma$, 其中 D 是顶点为 $(0, 0), (1, 0), (0.5, 0.5)$ 的三角形。

解析思路:

- 若先积 y : $x \in [0, 1]$, 但上边界在 $x = 0.5$ 处发生转折, 需分块。
- 若先积 x : $y \in [0, 0.5]$, 左边界 $x = y$, 右边界 $x = 1 - y$ 。无需分块!

$$I = \int_0^{0.5} dy \int_y^{1-y} f(x, y) dx$$

■ 题: 交换次序技巧

将 $I = \int_0^1 dy \int_0^y f dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f dx$ 改写为一个累次积分。

解析步骤:

1. **还原区域:** 由积分限知区域由 $x = 0, x = y(0 \leq y \leq 1)$ 和 $x = 0, x = 2 - y(1 \leq y \leq 2)$ 围成。
2. **几何形状:** 这是一个顶点为 $(0, 0), (0, 2), (1, 1)$ 的三角形。
3. **交换次序:** 固定 $x \in [0, 1], y$ 从下界 x 到上界 $2 - x$ 。

$$I = \int_0^1 dx \int_x^{2-x} f(x, y) dy$$



题: 难点突破

■ 计算 $I = \int_0^1 dx \int_x^1 e^{y^2} dy$ 。

解析关键:

- e^{y^2} 的原函数不是初等函数, 直接积 y 走不通。
- 交换次序: 区域 $0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1 \implies 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y$ 。

$$I = \int_0^1 dy \int_0^y e^{y^2} dx = \int_0^1 ye^{y^2} dy$$

$$I = \left[\frac{1}{2} e^{y^2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}(e - 1)$$



题: 技巧挑战

■ 计算 $I = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3 + 1} dx$ 。

解析:

1. 换序: $0 \leq y \leq 1, \sqrt{y} \leq x \leq 1 \implies 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2$ 。

2. 计算:

$$I = \int_0^1 \sqrt{x^3 + 1} dx \int_0^{x^2} dy = \int_0^1 x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx = \frac{2}{9}(2\sqrt{2} - 1)$$



题: 换序绕坑

■ 计算 $I = \int_1^2 dy \int_y^2 \frac{y \sin x}{x^2 - 1} dx$ 。

解析:

1. 换序: $1 \leq y \leq 2, y \leq x \leq 2 \implies 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq x$ 。
2. 计算:

$$I = \int_1^2 \frac{\sin x}{x^2 - 1} dx \int_1^x y dy = \int_1^2 \frac{\sin x}{x^2 - 1} \cdot \frac{1}{2}(x^2 - 1) dx$$
$$I = \frac{1}{2} \int_1^2 \sin x dx = \frac{1}{2}(\cos 1 - \cos 2)$$

工具选对，事半功倍

PART 5

维度	选直角坐标	选极坐标
区域 D	矩形、三角形	圆、扇形
函数 f	多项式	含 $x^2 + y^2, y/x$
边界线	$y = kx + b$	$x^2 + y^2 = R^2$