

10-3 三重积分的计算

第十章 多元积分学

张振



厦门大学嘉庚学院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

1. 三重积分的定义与性质
2. 直角坐标系下的计算
3. 三重积分的换元法
 - 3.1 柱面坐标系
 - 3.2 球面坐标系
4. 方法选择与对称性

从体积和到三重积分

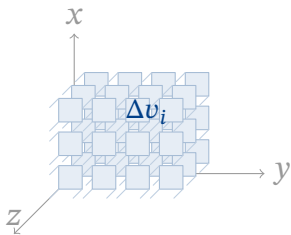
PART 1

设空间闭区域 Ω 被分成许多小闭区域 ΔV_i , 体积为 Δv_i 。在每个小区域中任取一点 (ξ_i, η_i, ζ_i) , 作积分和

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i.$$

当分割无限加细且该和的极限存在时, 称此极限为 f 在 Ω 上的三重积分:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV.$$



几何意义:

$$\iiint_{\Omega} 1 \, dV = V(\Omega).$$

若 $f(x, y, z)$ 表示密度, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dV$$

表示区域 Ω 内的总质量。

基本性质:

1. 线性:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (\alpha f + \beta g) \, dV &= \alpha \iiint_{\Omega} f \, dV \\ &+ \beta \iiint_{\Omega} g \, dV. \end{aligned}$$

2. 区域可加性: 区域分块时, 积分可分块相加。

3. 保号性: 若 $f \geq 0$, 则 $\iiint_{\Omega} f \, dV \geq 0$ 。

先看清区域，再确定积分次序

PART 2

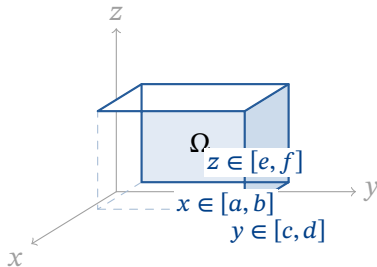
若

$$\Omega = [a, b] \times [c, d] \times [e, f],$$

则三重积分可以直接写成三次积分:

$$\iiint_{\Omega} F(x, y, z) dV = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f F(x, y, z) dz.$$

当积分区域是长方体时,三个变量的上下限互不依赖,积分次序可以任意交换。

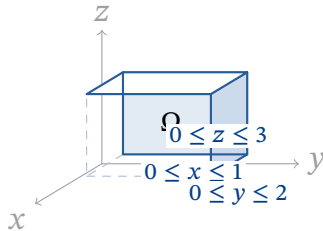


题:基础计算

计算

$$I = \iiint_{\Omega} xyz \, dV,$$

$$\Omega = [0, 1] \times [0, 2] \times [0, 3].$$



因为区域是长方体,直接按三个固定区间积分:

$$I = \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 xyz \, dz.$$

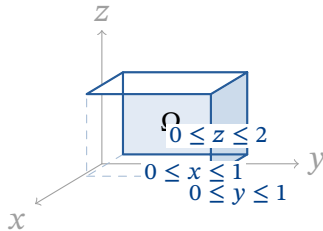
分离变量得

$$I = \left(\int_0^1 x \, dx \right) \left(\int_0^2 y \, dy \right) \left(\int_0^3 z \, dz \right) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{9}{2} = \frac{9}{2}.$$

题:课堂练习

计算

$$\iiint_{\Omega} (x + y + z) dV,$$
$$\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 2].$$



长方体区域中三个变量范围互不依赖,直接分项积分:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^2 (x + y + z) dz \\ &= \iiint_{\Omega} x dV + \iiint_{\Omega} y dV + \iiint_{\Omega} z dV. \end{aligned}$$

其中

$$\iiint_{\Omega} x dV = 1, \quad \iiint_{\Omega} y dV = 1, \quad \iiint_{\Omega} z dV = 2.$$

因此

$$I = 4.$$

若空间区域可写成

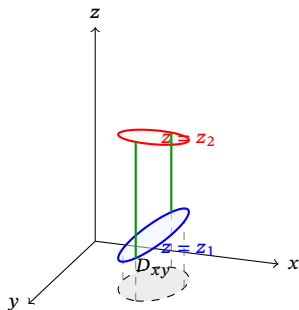
$$\Omega = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D_{xy}, \\ z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\},$$

则

$$\iiint_{\Omega} F \, dV = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} F(x, y, z) \, dz \right] dx \, dy.$$

口诀:一条线,扫一片。

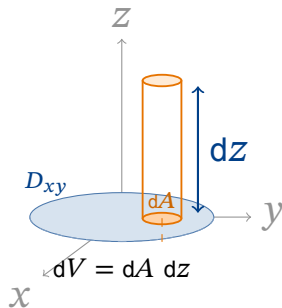
先沿 z 方向积分,再扫过 D_{xy} 。



先一后二:线段限 + 投影限

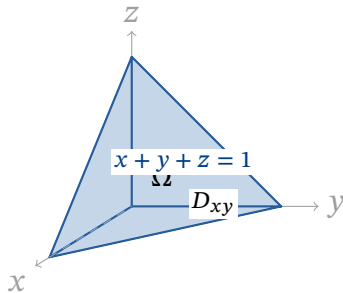
1. 选方向
2. 写线段
3. 写投影

$$dV = dA \, dz$$



题:基础练习

计算 $I = \iiint_{\Omega} z \, dV$, 其中 Ω 由 $x + y + z = 1$ 与三坐标面围成。





顺序:先 z , 后 x, y 。

线段限

$$0 \leq z \leq 1 - x - y.$$

投影限

$$D_{xy} : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1.$$

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 - x.$$

列式

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} z dz.$$

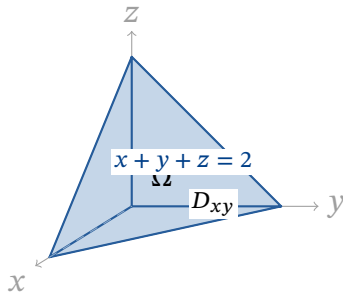
$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)^2 dy = \frac{1}{24}.$$

题:课堂练习

计算

$$\iiint_{\Omega} (x + y) dV,$$

其中 Ω 由 $z = 0$, $z = 2 - x - y$ 以及 $x = 0$, $y = 0$ 围成。



顺序:先 z , 后 x, y 。

$$0 \leq z \leq 2 - x - y.$$

$$D_{xy} : x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq 2.$$

$$I = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy \int_0^{2-x-y} (x+y) dz.$$

$$I = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (x+y)(2-x-y) dy = \frac{4}{3}.$$

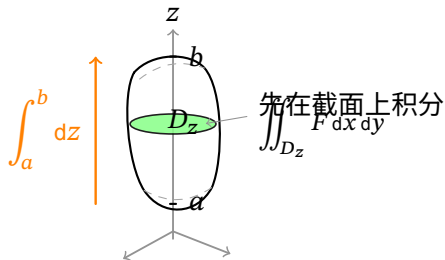
若空间区域可写成

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid a \leq z \leq b, (x, y) \in D_z\},$$

则

$$\iiint_{\Omega} F(x, y, z) \, dV = \int_a^b \left[\iint_{D_z} F(x, y, z) \, dx \, dy \right] dz.$$

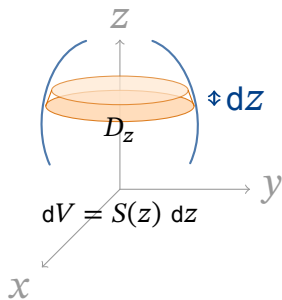
先二后一:先在固定 z 的截面 D_z 上作二重积分,再让截面沿 z 方向变化。



先二后一:截面面积 + 高度限

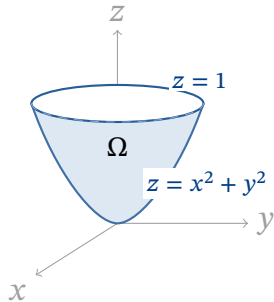
1. 选切片
2. 写外限
3. 看截面

$$dV = S(z) dz$$



■ 题:进阶计算

计算 $I = \iiint_{\Omega} z^2 dV$, 其中 Ω 是抛物面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 1$ 围成的区域。



顺序: 先截面, 后 z 。

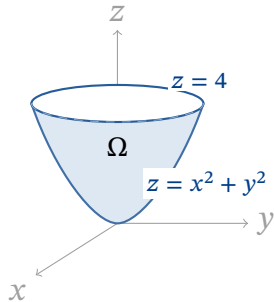
$$0 \leq z \leq 1, \quad D_z : x^2 + y^2 \leq z.$$

$$S(z) = \pi z.$$

$$I = \int_0^1 dz \iint_{D_z} z^2 dx dy = \int_0^1 z^2 \cdot \pi z dz = \frac{\pi}{4}.$$

题:课堂练习

求由 $x^2 + y^2 \leq z \leq 4$ 围成的空间区域体积。



顺序: 先截面, 后 z 。

$$0 \leq z \leq 4, \quad D_z : x^2 + y^2 \leq z.$$

$$S(z) = \pi z.$$

$$V = \int_0^4 S(z) \, dz = \int_0^4 \pi z \, dz = 8\pi.$$

坐标变换改变体积微元

PART 3

设

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w),$$

且变换把新坐标区域 G 映到原区域 Ω 。若雅可比行列式

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$$

不为零,则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_G f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J| \, du \, dv \, dw.$$

注意:关键点

换元时不仅要改写被积函数和积分区域,还必须改写体积微元。

柱面坐标系：空间 极坐标的自然延伸

PART 3

3.2 柱面坐标:空间极坐标的延伸



坐标变换:

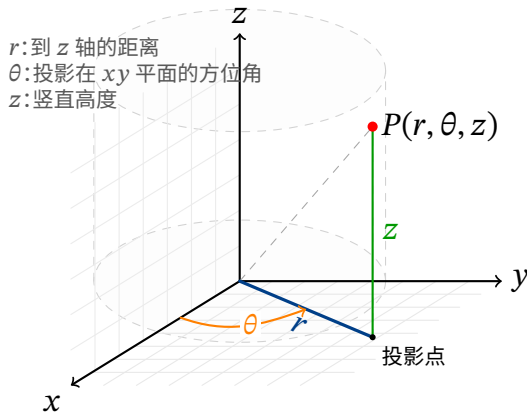
$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \\ z = z. \end{cases}$$

体积微元:

$$dV = r \, dr \, d\theta \, dz.$$

判定准则

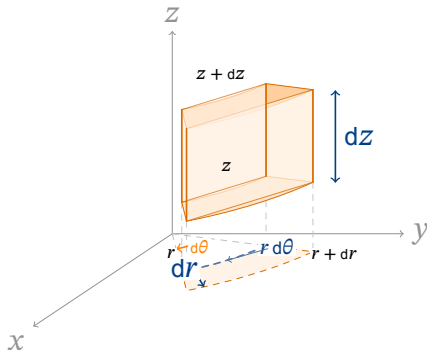
投影域是圆或圆环; 被积函数含 $x^2 + y^2$; 区域绕 z 轴旋转。



$$\theta \rightarrow r \rightarrow z$$

1. θ : 方位角
2. r : 投影半径
3. z : 上下曲面

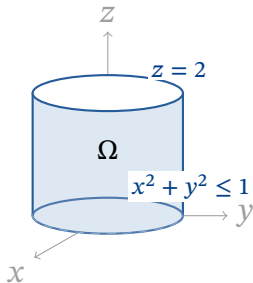
$$dV = r d\theta dr dz$$



题:变式练习

计算 $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dV$, 其中

$$\Omega : x^2 + y^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 2.$$



边界

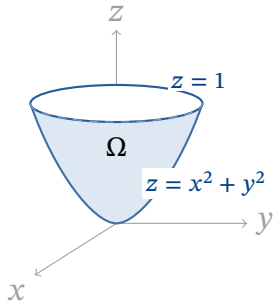
$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 2.$$

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad dV = r \, dz \, dr \, d\theta.$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_0^2 r^2 \cdot r \, dz = 2\pi \int_0^1 2r^3 \, dr = \pi.$$

题:强化练习

- 计算 $I = \iiint_{\Omega} z \, dV$, 其中 Ω 由 $z = x^2 + y^2$ 与 $z = 1$ 围成。



边界确定:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad r^2 \leq z \leq 1.$$

积分计算:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \\ &\quad \cdot \int_{r^2}^1 z r dz \\ &= 2\pi \int_0^1 \frac{r}{2} (1 - r^4) dr \\ &= \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

注意:定限口诀:穿针引线法

1. 投影定平面:

xy 面上确定 r, θ 。

2. 射线定高度:

沿 z 轴正向穿过区域:

■ 下底(穿入面)为下限
 $z = r^2$;

■ 上顶(穿出面)为上限
 $z = 1$ 。

球面坐标系：球体 对称性的常用坐标

PART 3

坐标变换:

$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta, \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta, \\ z = \rho \cos \phi. \end{cases}$$

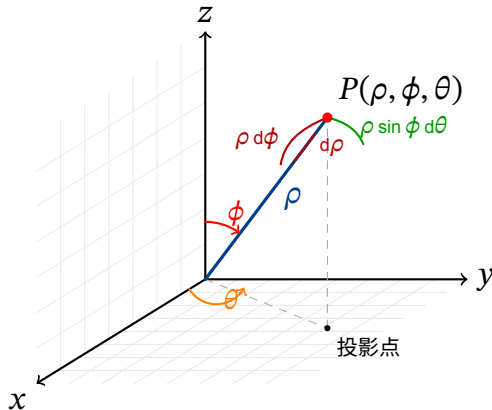
体积微元:

$$dV = \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$$

判定准则

积分区域为球体、半球或圆锥体;被积函数含 $x^2 + y^2 + z^2$ 。

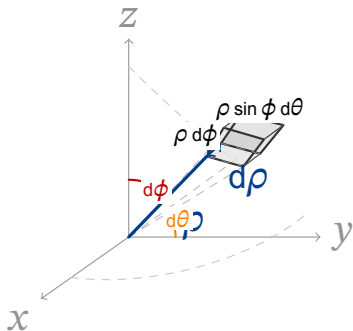
ρ : 原点到空间点的距离
 ϕ : 从 z 轴转到 OP 的极角
 θ : 投影在 xy 平面的方位角



$$\theta \rightarrow \phi \rightarrow \rho$$

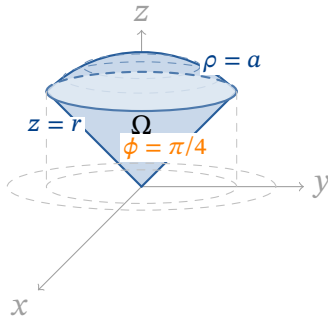
1. θ : 投影扇形
2. ϕ : 极角
3. ρ : 径向距离

$$dV = \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$



■ 题: 经典难题

求 Ω 的体积, 其中 Ω 由 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 围成。





先确定坐标与顺序: 边界含球面和圆锥面, 选球面坐标。先读 θ , 再读 ϕ , 最后读 ρ 。

上下限来源:

1. 绕 z 轴完整旋转, 所以

$$0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

2. 锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 给出

$$\rho \cos \phi = \rho \sin \phi,$$

因此 $\phi = \pi/4$; 取锥面内部上方, 所以 $0 \leq \phi \leq \pi/4$ 。

3. 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 给出 $0 \leq \rho \leq a$ 。



积分区域为

$$0 \leq \rho \leq a, \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

因此体积

$$V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} \sin \phi d\phi \int_0^a \rho^2 d\rho.$$

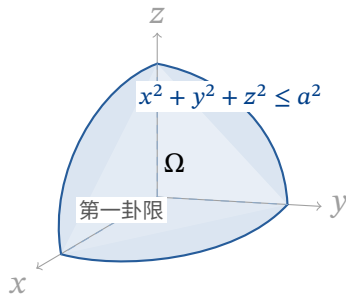
计算得

$$V = 2\pi \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \frac{a^3}{3} = \frac{2\pi a^3}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

题:强化变式

计算 $\iiint_{\Omega} z \, dV$, 其中

$$\Omega : \begin{aligned} &x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, \\ &x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0. \end{aligned}$$



区域是第一卦限内的八分之一球体。按三个变量分别读边界：

1. $x \geq 0, y \geq 0$ 给出投影在第一象限, 故 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 。
2. $z \geq 0$ 给出上半空间, 故 $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ 。
3. 球面给出径向范围, 故 $0 \leq \rho \leq a$ 。

因此

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \rho \leq a.$$

又 $z = \rho \cos \phi$, $dV = \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$, 所以

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} \sin \phi \cos \phi d\phi \int_0^a \rho^3 d\rho \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a^4}{4} = \frac{\pi a^4}{16}. \end{aligned}$$

先选坐标，再做计算

PART 4

- **奇偶性:**若 Ω 关于 xy 面对称,且 $f(x, y, -z) = -f(x, y, z)$, 则

$$\iiint_{\Omega} f \, dV = 0.$$

- **轮换对称性:**若 Ω 对 x, y, z 轮转不变, 则

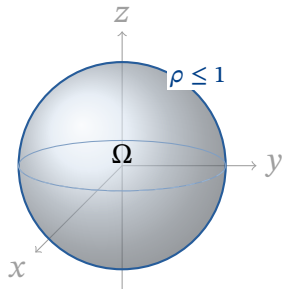
$$\iiint_{\Omega} x^2 \, dV = \iiint_{\Omega} y^2 \, dV = \iiint_{\Omega} z^2 \, dV.$$

- **方法选择:**长方体直接积分;上下曲面夹住用投影法;水平截面简单用截面法;圆柱对称用柱面坐标;球面对称用球面坐标。

题: 高频考题

计算

$$I = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} x^2 \, dV.$$



由轮换对称性,

$$\iiint_{\Omega} x^2 dV = \iiint_{\Omega} y^2 dV = \iiint_{\Omega} z^2 dV.$$

因而

$$I = \frac{1}{3} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dV.$$

转为球面坐标:

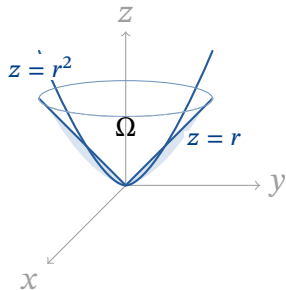
$$I = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \phi d\phi \int_0^1 \rho^4 d\rho = \frac{4\pi}{15}.$$

题:判定题

计算 $\iiint_{\Omega} z \, dV$, 其中 Ω 由

$$z = x^2 + y^2, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

围成。先判断更适合使用哪一种坐标或哪一种积分次序。



两个曲面都是绕 z 轴旋转的曲面,使用柱面坐标最合适:

$$z = x^2 + y^2 \Rightarrow z = r^2, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow z = r.$$

交线满足 $r^2 = r$, 故 $0 \leq r \leq 1$ 。区域为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad r^2 \leq z \leq r.$$

因此

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_{r^2}^r z r dz \\ &= 2\pi \int_0^1 \frac{r}{2} (r^2 - r^4) dr = \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

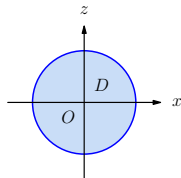
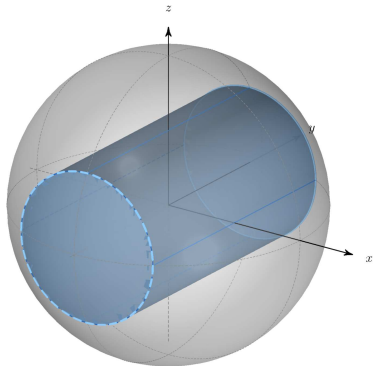
■ 题:综合例题

求柱面 $x^2 + z^2 \leq 1$ 被
球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$
所截部分的体积 V 。

柱轴是 y 轴

$$x^2 + z^2 = r^2, \quad r \leq 1$$

$$y = \pm\sqrt{4 - r^2}$$



xz 平面投影

先y,后xz

$$D_{xz} : x^2 + z^2 \leq 1$$

$$x = r \cos \theta, \quad z = r \sin \theta$$

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$-\sqrt{4-r^2} \leq y \leq \sqrt{4-r^2}$$

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} r dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 2r\sqrt{4-r^2} dr \\ &= \frac{4\pi}{3}(8 - 3\sqrt{3}). \end{aligned}$$

$$x = r \cos \theta, \quad z = r \sin \theta, \quad y = y$$

$$dV = r \, dy \, dr \, d\theta$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

$$0 \leq r \leq 1,$$

$$-\sqrt{4-r^2} \leq y \leq \sqrt{4-r^2}.$$

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} r \, dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 2r\sqrt{4-r^2} \, dr \\ &= \frac{4\pi}{3}(8-3\sqrt{3}). \end{aligned}$$

本题首选。

$$y = \rho \cos \phi, \quad x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad z = \rho \sin \phi \sin \theta$$

$$dV = \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$\rho = 2, \quad \rho \sin \phi = 1$$

$$\phi = \frac{\pi}{6}$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\begin{cases} 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{6}, & 0 \leq \rho \leq 2, \\ \frac{\pi}{6} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, & 0 \leq \rho \leq \csc \phi. \end{cases}$$

球坐标要分段。

4.2 例 10-15: 解法三(广义球坐标·解析计算)



$$\begin{aligned}\frac{V}{2} &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/6} d\phi \int_0^2 \rho^2 \sin \phi d\rho \\ &+ \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi/6}^{\pi/2} d\phi \int_0^{\csc \phi} \rho^2 \sin \phi d\rho\end{aligned}$$

$$V = 2(A + B)$$

$$A = \frac{16\pi}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$B = \frac{2\pi}{3} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \csc^2 \phi d\phi.$$

$$B = \frac{2\pi}{3} [-\cot \phi]_{\pi/6}^{\pi/2} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}.$$

$$\begin{aligned}\frac{V}{2} &= A + B = \frac{16\pi}{3} - \frac{8\sqrt{3}\pi}{3} + \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} \\ &= \frac{2\pi}{3}(8 - 3\sqrt{3}).\end{aligned}$$

$$V = \frac{4\pi}{3}(8 - 3\sqrt{3}).$$



- **定义与性质:**三重积分是空间积分和的极限, $f = 1$ 时给出体积。
- **直角坐标:**长方体直接积分;一般区域用投影法或截面法。
- **换元法:**换函数、换区域、换体积微元。
- **柱面坐标:**旋转体与 $x^2 + y^2$ 结构首选。
- **球面坐标:**球体、半球、圆锥与 $x^2 + y^2 + z^2$ 结构首选。
- **对称性:**先化简,再计算。