

10-4重积分的应用

第十章 多元积分学

张振



厦门大学嘉庚学院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

- 1 曲面面积的计算
- 2 物理应用:质心与惯性

从投影到真实的还原

PART 1



几何关系: 投影面积 $d\sigma = dA \cdot \cos \gamma$ 。真实面积

$dA = \frac{1}{\cos \gamma} d\sigma$ 。 **计算公式:**

$$A = \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} d\sigma$$

法向量视角

法向量 $\vec{n} = (f_x, f_y, -1)$ 。 $\cos \gamma$ 是法向量与 z 轴夹角的余弦。



题:几何练习

计算上半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 含在圆柱 $x^2 + y^2 = ax$ 内部的面积。



解析步解:

1. 求导与因子: $z_x = -x/z, z_y = -y/z \implies \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = a/z$ 。
2. 投影区域: $D : (x - a/2)^2 + y^2 \leq (a/2)^2$ 。



解析步解:

3. 极坐标积分:

$$A = 2 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{a \cos \theta} \frac{ar}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr$$

4. 结果:

$$A = 2a^2 \int_0^{\pi/2} (1 - \sin \theta) d\theta = (\pi - 2)a^2$$



题: 变式练习

计算锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被平面 $z = 1$ 所截部分的面积。

解析: 由于 $z_x^2 + z_y^2 = 1$, 面积元素为 $\sqrt{2} d\sigma$ 。投影区域为单位圆, 面积为 π 。故总面积为 $\sqrt{2}\pi$ 。

质量分布的数学建模

PART 2



- 质心: 物体的“物理中心”。
- 形心: 物体的“几何中心”。

公式回顾:

$$\bar{x} = \frac{\iiint x \rho \, dV}{M}, \quad \bar{y} = \frac{\iiint y \rho \, dV}{M}, \quad \bar{z} = \frac{\iiint z \rho \, dV}{M}$$



题:计算技巧

计算 $\iint_D (x + 2y) d\sigma$, 其中 $D : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 4$ 。



解析步解:

1. 形心位置: 圆心 $(1, 2) \implies \bar{x} = 1, \bar{y} = 2$ 。
2. 区域面积: $A = 4\pi$ 。
3. 结论:

$$I = (\bar{x} + 2\bar{y}) \cdot A = (1 + 4) \cdot 4\pi = 20\pi$$



- 对 x 轴: $I_x = \iint_D y^2 \rho \, d\sigma$ 。
- 对 y 轴: $I_y = \iint_D x^2 \rho \, d\sigma$ 。
- 对原点: $I_o = I_x + I_y$ 。



题:物理计算

求半径为 R , 密度为 ρ_0 的均匀圆盘对圆心的转动惯量 I_o 。

解析:

$$I_o = \rho_0 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^3 dr = \rho_0 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4}R^4 = \frac{1}{2}MR^2$$

其中 $M = \rho_0\pi R^2$ 为总质量。



旋转曲面面积

平面曲线 L 绕其平面内不相交的轴旋转所得旋转曲面的面积为:

$$S = 2\pi \cdot \bar{r} \cdot l$$

其中 l 是曲线长度, $\bar{r}$ 是曲线形心到旋转轴的距离。



旋转体体积

平面区域 D 绕轴旋转所得体积为:

$$V = 2\pi \cdot \bar{r} \cdot A$$

其中 A 是区域面积, $\bar{r}$ 是区域形心到轴的距离。



题:综合应用

- 圆 $x^2 + (y - b)^2 \leq a^2$ ($b > a$) 绕 x 轴旋转。求: 1. 旋转体的体积 V ; 2. 旋转曲面的面积 S 。



解析步解:

1. 体积:形心 $(0, b) \rightarrow \bar{r} = b$ 。面积 $A = \pi a^2$ 。

$$V = 2\pi \cdot b \cdot (\pi a^2) = 2\pi^2 a^2 b$$

2. 面积:圆周长 $l = 2\pi a$ 。形心 $(0, b) \rightarrow \bar{r} = b$ 。

$$S = 2\pi \cdot b \cdot (2\pi a) = 4\pi^2 ab$$



题:物理建模

求半球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0$ 对位于原点的质点 m 的引力。



解析步解:

1. 对称性分析: 由对称性, $F_x = F_y = 0$ 。总引力沿 z 轴。
2. 微元力: $dF_z = G \frac{m \cdot \rho dV}{r^2} \cdot \cos \phi$ 。

解析步解:

3. 球面坐标积分:

$$F_z = Gm\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \cos \phi \sin \phi d\phi \int_0^R \frac{1}{r^2} \cdot r^2 dr$$

4. 结果: $F_z = Gm\rho \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot R = Gm\rho\pi R。$

题:判定题

均匀半球体 $z \geq 0$ 的形心 $\bar{z} = 3R/8$ 。若密度变为 $\rho = kz$, 质心位置会:

- (A) 向上移 (变大)
- (B) 向下移 (变小)
- (C) 不变

解析: 密度 $\rho = kz$ 意味着上方越重, 下方越轻。故质心位置必会向重的一侧偏移。
答案选 A。



应用类型	公式核心
曲面面积	$\iint \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} d\sigma$
质心坐标	$\iiint x\rho dV / M$
转动惯量 (对 z 轴)	$\iiint (x^2 + y^2)\rho dV$
古尔丁体积	$2\pi \bar{r} A$



- 几何:面积与体积的联系。
- 物理:质心与转动惯量的建模。
- 计算:善用形心与对称性。

第十章完