

12-1 常数项无穷级数的概念与性质

第十二章 无穷级数

张振



厦门大学嘉庚学院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

- 1 无穷级数的概念
- 2 无穷级数的性质
- 3 典型例题
- 4 本节总结

无穷求和的基本概念

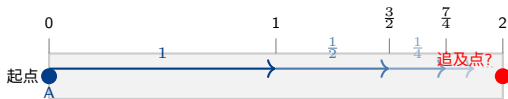
PART 1

芝诺悖论(Zeno's Paradox)

阿基里斯(Achilles)追乌龟:

- 乌龟起初在前方 A_0 处
- 阿基里斯到达 A_0 时, 乌龟已到 A_1
- 阿基里斯到达 A_1 时, 乌龟又到 A_2
-

芝诺认为: 阿基里斯永远追不上乌龟!



$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = ?$$

先看前几步路程：

$$1, \quad 1 + \frac{1}{2}, \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \quad \dots$$

它们越来越接近 2：

先看前几步路程：

$$1, \quad 1 + \frac{1}{2}, \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \quad \dots$$

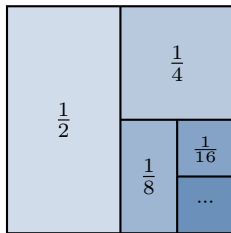
它们越来越接近 2：

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 2$$

关键：无穷多段，总长也可能有限。

后面要做的事：给这种“无限相加”一个严格定义。

$$1 \times 1$$



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1$$

因此总长 $= 1 + 1 = 2$ 。

1. 信号的分解与合成 (频谱分析)

- 复杂的非正弦波信号可以拆解为**无穷多个正弦波之和**(傅里叶级数)。
- 级数的收敛性决定了信号还原的精确度。

2. 非线性电路近似 (以直代曲)

- 二极管等半导体器件的 $I - V$ 关系极度非线性。
- 在小信号分析时展开为**泰勒级数**, 只保留线性项以极大简化电路分析。

3. 反馈系统与音响啸叫

- 麦克风对准扬声器时, 声音信号无限循环累加。
- 系统输出总能量可表示为**等比级数**。
- 级数**收敛** $\Rightarrow$ 系统稳定; 级数**发散** $\Rightarrow$ 系统失控啸叫。

无穷级数

设 $\{u_n\}$ 是一个数列,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots$$

称为**无穷级数**。

u_n 称为**通项**。

部分和

前 n 项之和记为

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k$$

即

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

核心:无穷级数 $\longrightarrow$ 部分和数列 $\{S_n\}$ 。

级数的敛散性,看部分和数列 $\{S_n\}$ 。

收敛与发散的等价定义

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \quad (S \text{ 为有限常数})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \text{ 不存在或为 } \infty$$

	数列极限	级数收敛
研究对象	$\{u_n\}$	$\{S_n\}$
判断内容	$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = A$	$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$

定义的等价表述

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛于 } S \iff \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S, \quad S_n = \sum_{k=1}^n u_k.$$

级数问题本质上是部分和数列的极限问题。

命题

等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \dots (a \neq 0)$:

$$\text{收敛} \iff |q| < 1, \quad \text{和} = \frac{a}{1-q}$$

$|q| \geq 1$ 时发散。

设

$$S_n = \sum_{k=0}^n aq^k = a + aq + \cdots + aq^n.$$

当 $q \neq 1$ 时,

$$qS_n = aq + aq^2 + \cdots + aq^{n+1},$$

$$(1 - q)S_n = a(1 - q^{n+1}), \quad S_n = \frac{a(1 - q^{n+1})}{1 - q}.$$

由

$$S_n = \frac{a(1 - q^{n+1})}{1 - q} \quad (q \neq 1)$$

可得:

■ 若 $|q| < 1$, 则 $q^{n+1} \rightarrow 0$, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1 - q}.$$

■ 若 $|q| > 1$, 则 q^{n+1} 不趋于 0, 故 $\{S_n\}$ 无有限极限。

■ 若 $q = 1$, 则 $S_n = (n + 1)a$, 发散。

■ 若 $q = -1$, 则 $\{S_n\}$ 振荡, 发散。

题:练习

判断下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n}, \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n, \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{3^n}.$$

逐项分析:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$, 公比 $q = \frac{1}{2} < 1$, 收敛, 和为 $3 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 3$ 。

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n$, 公比 $q = -\frac{2}{3}$, $|q| < 1$, 收敛, 和为 $\frac{3}{5}$ 。

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^n$, 公比 $q = \frac{5}{3} > 1$, 发散。

问题

$$\text{级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

$$\text{通项 } u_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0,$$

判断该级数的敛散性:

(A) 收敛

(B) 发散

题:结论

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \quad \text{发散}$$

经典证明(Oresme, 14 世纪, 分组放缩):

$$\begin{aligned} S_{2n} &= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{>1/2} + \underbrace{\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}}_{>1/2} + \dots \\ &> 1 + \frac{n}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \end{aligned}$$

结论:调和级数发散。

通项 $\rightarrow 0$ 是收敛的必要条件,
而非充分条件。

级数的基本性质

PART 2

- 性质 1(数乘): 若 $\sum u_n$ 收敛于 $S, k \neq 0$, 则 $\sum ku_n$ 收敛于 kS 。
- 性质 2(加减): 若 $\sum u_n = S, \sum v_n = T$, 则

$$\sum (u_n \pm v_n) = S \pm T$$

注意: 注意

收敛级数 $\pm$ 收敛级数 = 收敛级数。

收敛级数 $\pm$ 发散级数 = 发散级数。

发散 $\pm$ 发散 = 不确定(需另行判断)。

- **性质 3:** 在级数前面去掉或加上有限项, 不改变级数的**敛散性**(但会改变和的值)。

题:应用

判断 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 的敛散性,并求其和。

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}.$$

由于

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2,$$

故

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}.$$

定理(收敛的必要条件)

若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 。

逆否命题(发散充分条件): 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, 则级数一定发散。

题:应用

■ 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - 10)$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \underline{10}$ 。

令

$$v_n = u_n - 10.$$

已知

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n - 10)$$

收敛,由收敛的必要条件得

$$v_n \rightarrow 0.$$

因此

$$u_n = v_n + 10 \rightarrow 10.$$

部分和法与裂项求和

PART 3

对于无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

求和的基本路径是

$$S_N = \sum_{n=1}^N u_n, \quad S = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N.$$

裂项求和的作用是将 u_n 化为相邻项之差,使部分和 S_N 中大量中间项相消。

基本步骤

分解通项 $\longrightarrow$ 写出部分和 $\longrightarrow$ 取极限。

题:经典求和

求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 的和。

提示

关键变形:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

部分和中间项相消,最后只保留首项与末项。

$$S_N = 1 - \frac{1}{N+1}, \quad S = 1.$$

题:变形裂项

求 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$ 的和。

提示

令

$$b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

则通项可写为

$$u_n = b_{n+1} - b_n.$$

$$S_N = b_{N+1} - b_1, \quad S = 1 - \sqrt{2}.$$

题:对数求和

求 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right)$ 的和。

提示

先因式分解:

$$1 - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}.$$

再利用 $\ln AB = \ln A + \ln B$ 分拆通项。

$$S_N = \ln(N+2) - \ln(N+1) - \ln 2, \quad S = -\ln 2.$$

核心概念与基本方法

PART 4

核心概念

1. 级数: $\sum u_n$, 通项之和

2. 部分和: $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$

3. 收敛: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ (有限)

等比级数: $|q| < 1$ 收敛, 和 $= \frac{a}{1-q}$

必要条件: 收敛 $\Rightarrow u_n \rightarrow 0$

裂项三步走

Step 1: 部分分数分解 (或取对数分拆)

Step 2: 写出 S_N , 观察首尾保留项

Step 3: 令 $N \rightarrow \infty$ 取极限

常见误区

$u_n \rightarrow 0$ 不能推出级数收敛
(反例: 调和级数 $\sum 1/n$)

发散 $\pm$ 发散 $\neq$ 一定发散

- **核心逻辑:**级数 $\longrightarrow$ 部分和数列 $\{S_n\} \longrightarrow$ 取极限。
- **判定工具:**
 - 等比级数: $|q| < 1$ 收敛, 和 $= a/(1 - q)$ 。
 - 必要条件: 收敛 $\Rightarrow u_n \rightarrow 0$; $u_n \not\rightarrow 0 \Rightarrow$ 发散。
- **计算技巧:**裂项相消(望远镜三步走)。
- **典型反例:**调和级数 ($u_n \rightarrow 0$ 但发散)。

下节预告:常数项无穷级数的审敛法