

12-2 常数项无穷级数的审敛法

第十二章 无穷级数

张振



厦门大学嘉庚学院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

- 1 正项级数的审敛法
- 2 交错级数与条件收敛
- 3 正项级数的性质延伸

正项级数：比较与放缩

PART 1

正项级数的定义

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的各项均为非负实数,即:

$$u_n \geq 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

则称该级数为**正项级数**。

基本性质与收敛条件:

- **单调性:**正项级数的部分和数列 $\{S_k\}$ 是**单调递增**的
($S_k = S_{k-1} + u_k \geq S_{k-1}$)。
- **有界收敛定理:**正项级数收敛的**充分必要条件**是其部分和数列 $\{S_k\}$ **有上界**。

比较判别法

设 $\sum u_n$ 、 $\sum v_n$ 均为正项级数, 且 $u_n \leq v_n$ (从某项起), 则:

- 若 $\sum v_n$ 收敛, 则 $\sum u_n$ 收敛 (小的也收敛)。
- 若 $\sum u_n$ 发散, 则 $\sum v_n$ 发散 (大的也发散)。

极限形式(更常用)

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = L (0 < L < +\infty)$, 则两级数同敛散。



题:比较判别法热身

判断级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$$

的敛散性。

对 $n \geq 1$, 有

$$n^2 + n \geq n^2, \quad 0 < \frac{1}{n^2 + n} \leq \frac{1}{n^2}.$$

而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

是收敛的 p -级数, 因此由比较判别法, 原级数

收敛.

过渡

比较法要有参照级数;最常用的参照就是下一步要总结的 p -级数。

- 分母像 n^p : 优先比较 p -级数。
- 通项像 q^n : 优先比较等比级数。
- 含三角或对数小量: 先用等价无穷小找同阶参照。

p -级数结论

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} : p > 1 \text{ 时收敛}; p \leq 1 \text{ 时发散。}$$

常用等价无穷小($n \rightarrow \infty$ 时 $\alpha_n \rightarrow 0$):

$$\sin \alpha_n \sim \alpha_n, \quad \tan \alpha_n \sim \alpha_n, \quad \arctan \alpha_n \sim \alpha_n$$

$$1 - \cos \alpha_n \sim \frac{\alpha_n^2}{2}, \quad \ln(1 + \alpha_n) \sim \alpha_n, \quad e^{\alpha_n} - 1 \sim \alpha_n$$



题:应用练习

判断 $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{n\sqrt{n}}$ 的敛散性。

解析:

1. 等价替换: 当 $n \rightarrow \infty$, $\arctan \frac{1}{n\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n^{3/2}}$ 。
2. 选参照: 取 $v_n = \frac{1}{n^{3/2}}$, 这是 $p = 3/2 > 1$ 的 p -级数, 收敛。
3. 极限比: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctan(n^{-3/2})}{n^{-3/2}} = 1 \in (0, +\infty)$ 。
4. 结论: 由比较判别法(极限形式), 原级数收敛。

比值判别法

对正项级数 $\sum u_n$, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, 则:

■ $\rho < 1 \implies$ 收敛; $\rho > 1$ (含 $+\infty$) $\implies$ 发散; $\rho = 1 \implies$ 失效。

题:比值法实战

■ 判断 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ 的敛散性。



解析：

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e > 1$$

故原级数**发散**。



题:对比练习

判断 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ 的敛散性(注意:分子分母互换!)



解析:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{(1+1/n)^n} \rightarrow \frac{1}{e} < 1.$$

故原级数**收敛**。

根值判别法

对正项级数 $\sum u_n$, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$, 则:

■ $\rho < 1 \implies$ 收敛; $\rho > 1 \implies$ 发散; $\rho = 1 \implies$ 失效。

题:根值法实战

■ 判断 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-1}\right)^n$ 的敛散性。

解析:

1. 取 n 次方根:

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{2n+1}{3n-1}$$

2. 求极限:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n-1} = \frac{2}{3} < 1$$

3. 结论:原级数收敛。

选法口诀:通项含 n 次幂 $\rightarrow$ 根值法;含 $n!$ 或分段积 $\rightarrow$ 比值法。



题:综合判断

判断 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$ 的敛散性。

解析:

1. 等价替换: 当 $n \rightarrow \infty$, $\sin \frac{\pi}{3^n} \sim \frac{\pi}{3^n}$ (因为 $\frac{\pi}{3^n} \rightarrow 0$)。
2. 估量阶: $u_n = 2^n \sin \frac{\pi}{3^n} \sim \pi \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$ 。
3. 选参照: $\sum \left(\frac{2}{3}\right)^n$ 是等比级数, $q = \frac{2}{3} < 1$, 收敛。
4. 结论: $\lim \frac{u_n}{(2/3)^n} = \pi \in (0, +\infty)$, 由比较判别法原级数收敛。

Leibniz 判别法：正负交替

PART 2

交错级数的定义

各项正负相间(符号交替出现)的级数称为**交错级数**。其一般形式为:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots \quad (u_n > 0)$$

或

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n = -u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \cdots \quad (u_n > 0)$$



典型示例:

■ 交错调和级数: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

■ 等比交错级数: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots$

Leibniz 判别法

交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ ($u_n > 0$), 若满足:

1. u_n **单调不增**: $u_{n+1} \leq u_n$;
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$;

则级数**收敛**, 且 $|S - S_n| \leq u_{n+1}$ (余项估计)。

题:Leibniz 判别法热身

判断交错调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

的敛散性。

令

$$u_n = \frac{1}{n}.$$

则

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} = u_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

因此由 Leibniz 判别法,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \quad \text{收敛.}$$

再看绝对值级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

右端是调和级数,发散。

概念过渡

原级数收敛,但绝对值级数发散。这正是下面要定义的条件收敛。

定义

绝对收敛: 若 $\sum |u_n|$ 收敛, 则称 $\sum u_n$ 绝对收敛。

条件收敛: 若 $\sum u_n$ 收敛, 但 $\sum |u_n|$ 发散。

判断策略:

1. 先检验 $\sum |u_n|$ 是否收敛 (用正项级数审敛法)。
 - 若 $\sum |u_n|$ 收敛 $\implies$ **绝对收敛**。
 - 若 $\sum |u_n|$ 发散, 再用 Leibniz 法检验原级数。
 - 原级数收敛但 $\sum |u_n|$ 发散 $\implies$ **条件收敛**。



题:综合判断

判断 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{a}{n}\right)$ (a 为常数) 的收敛性质。

解析:

1. 先分情况: 若 $a = 0$, 则每一项均为 0, 原级数绝对收敛; 以下设 $a \neq 0$ 。

2. 估量阶: $1 - \cos \frac{a}{n} \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{n^2} = \frac{a^2}{2n^2} (n \rightarrow \infty)$ 。

3. 检验绝对值级数:

$$\left| (-1)^n \left(1 - \cos \frac{a}{n} \right) \right| \sim \frac{a^2}{2n^2}$$

$\sum \frac{1}{n^2}$ 是 $p = 2 > 1$ 的 p -级数, 收敛。

4. 结论: 对任意常数 a , 原级数绝对收敛。



题:参数型条件收敛

设 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{2p}}$ 条件收敛, 求参数 p 的取值范围。



解析:

1. 必要条件: 若 $p \leq 0$, 则 $1/n^{2p}$ 不趋于 0, 原级数发散。
2. Leibniz 条件: 若 $p > 0$, 则 $1/n^{2p}$ 单调趋零, 交错级数收敛。
3. 绝对收敛条件: 绝对值级数 $\sum 1/n^{2p}$ 在 $2p > 1$, 即 $p > 1/2$ 时收敛。
4. 条件收敛(非绝对): 需 $2p \leq 1$ 且 $p > 0$, 即 $0 < p \leq \frac{1}{2}$ 。

收敛级数衍生出什么？

PART 3

题:选择题

若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 (A)。

(A) $\sum a_n^2$ 收敛, $\sum \frac{a_n}{n}$ 收敛

(B) $\sum a_n^2$ 收敛, $\sum \frac{a_n}{n}$ 发散

(C) $\sum a_n^2$ 发散, $\sum \frac{a_n}{n}$ 收敛

(D) $\sum a_n^2$ 发散, $\sum \frac{a_n}{n}$ 发散

解析:

1. $\sum a_n^2$ 收敛:

$\sum a_n$ 收敛 $\Rightarrow a_n \rightarrow 0$ 。故存在 N , 当 $n > N$ 时 $0 \leq a_n < 1$, 从而 $a_n^2 \leq a_n$ 。
由比较判别法, $\sum a_n^2$ 收敛。

2. $\sum a_n/n$ 收敛:

$\frac{a_n}{n} \leq a_n$ (因为 $n \geq 1$), 由比较判别法 $\sum \frac{a_n}{n}$ 收敛。

故选 (A)。

方法	适用场景	判定条件
比较判别法(极限形式)	与 p -级数或等比对比	$L \in (0, +\infty)$ 同敛散
比值判别法	含 $n!$ 、 a^n	$\rho < 1$ 收敛; $\rho > 1$ 发散
根值判别法	通项有 n 次幂	$\rho < 1$ 收敛; $\rho > 1$ 发散
Leibniz 判别法	交错级数	单调趋零 $\Rightarrow$ 收敛

下节预告: 幂级数