

12-3 幂级数

第十二章 无穷级数

张振



厦门大学嘉庚学院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

- 1 幂级数的概念
- 2 求收敛半径和收敛域
- 3 幂级数的和函数

从常数项级数到函数级数

PART 1

定义

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

称为 x 的**幂级数**, a_n 称为**系数**。

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

是以 x_0 为中心的幂级数。

核心问题: 哪些 x 使级数收敛?

Abel 定理

若幂级数 $\sum a_n x^n$ 在 $x = x_1$ ($x_1 \neq 0$) 处**收敛**, 则对所有满足 $|x| < |x_1|$ 的 x , 级数**绝对收敛**。

若在 $x = x_2$ 处**发散**, 则对所有 $|x| > |x_2|$ 的 x , 级数**发散**。

只看“已知收敛 $\Rightarrow$ 内部绝对收敛”。

$$\sum a_n x_1^n \text{ 收敛} \implies |a_n x_1^n| \leq M$$

当 $|x| < |x_1|$ 时,

$$|a_n x^n| = |a_n x_1^n| \left| \frac{x}{x_1} \right|^n \leq M \left| \frac{x}{x_1} \right|^n.$$

$$q = \left| \frac{x}{x_1} \right| < 1, \quad \sum M q^n \text{ 收敛}.$$

比较判别法 $\implies \sum a_n x^n$ 绝对收敛.

题:Abel 定理应用

设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = -3$ 处收敛, 在 $x = 4$ 处发散, 则该级数在 $x = 2$ 处必定()。

- (A) 发散 (B) 条件收敛 (C) 绝对收敛 (D) 敛散性不确定

1. $x = -3$ 处收敛:

$$|x| < 3 \implies \text{绝对收敛.}$$

2. $x = 4$ 处发散:

$$|x| > 4 \implies \text{发散.}$$

3. $|2| = 2 < 3$, 故 $x = 2$ 处必定绝对收敛。

故选 C.



定义:收敛半径与收敛区间

对幂级数 $\sum a_n x^n$, 存在 $R \in [0, +\infty]$:

$$|x| < R \Rightarrow \text{绝对收敛}, \quad |x| > R \Rightarrow \text{发散}.$$

R 称为收敛半径, $(-R, R)$ 称为收敛区间。

端点不能靠半径判断

$x = \pm R$ 需分别代入原级数检验; 收敛区间加上收敛端点, 才是收敛域。

定理:比值法与根值法

若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho \quad \text{或} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho,$$

则

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & 0 < \rho < +\infty \\ +\infty, & \rho = 0 \\ 0, & \rho = +\infty \end{cases}$$

求 R 的本质:求一个数列极限.

设 $u_n(x) = a_n x^n$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho |x|.$$

$$\rho |x| < 1 \iff |x| < \frac{1}{\rho} \Rightarrow \text{绝对收敛.}$$

$$\rho |x| > 1 \iff |x| > \frac{1}{\rho} \Rightarrow \text{发散.}$$

$$\text{因此 } R = \frac{1}{\rho}.$$

三步走：半径 $\rightarrow$ 端点 $\rightarrow$ 定域

PART 2

1. 先求半径

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|, \quad R = \frac{1}{\rho}.$$

2. 再验端点

$$x = R, \quad x = -R.$$

3. 最后写域

收敛域 = $(-R, R)$ + 收敛端点.

常见失分点

端点必须代入原级数, 不能只写 $(-R, R)$ 。

题: 求收敛半径和收敛域

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$$

1. 比值法:

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{n}{2(n+1)} |x| \longrightarrow \frac{|x|}{2}.$$

因此 $|x| < 2, R = 2$ 。

2. 端点:

$$x = 2 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{收敛}; \quad x = -2 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{发散}.$$

3. 收敛域: $(-2, 2]$ 。

先定义对象，再使用运算工具

PART 3

定义

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域为 D 。对每个 $x \in D$ ，数项级数有一个和：

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

函数 $S(x)$ 称为该幂级数的**和函数**。

核心任务：把级数写成一个熟悉函数。

核心公式

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1.$$

这说明:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ 的和函数是 } S(x) = \frac{1}{1-x}.$$

部分和:

$$S_N(x) = 1 + x + \cdots + x^N = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x}.$$

当 $|x| < 1$ 时, $x^{N+1} \rightarrow 0$, 于是

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) = \frac{1}{1 - x}.$$

$$\frac{1}{1 - x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1.$$

运算定理

设

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad R > 0.$$

则在 $(-R, R)$ 内:

$$\blacksquare S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1};$$

$$\blacksquare \int_0^x S(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

直观理解

在收敛区间内,幂级数可以像多项式一样逐项运算:

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} (a_n x^n).$$

注意

逐项求导、逐项积分只在**收敛区间内部**直接使用;端点另验。

从等比级数变形

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

求导/积分 $\implies$ 凑通项 $\implies$ 得到 $S(x)$.

- 出现 $n, n(n+1)$: 优先**求导**。
- 出现 $\frac{1}{n+1}$: 优先**积分**。

题:求和函数及特殊值

求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)x^n$ 的和函数,并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)}{3^n}$ 的和。

对 $u_n(x) = n(n-1)x^n$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)n}{n(n-1)} |x| = |x|.$$

所以 $R = 1$, 收敛区间为 $(-1, 1)$ 。

$$x = \pm 1 : \quad n(n-1)(\pm 1)^n \not\rightarrow 0,$$

两端点发散, 收敛域为 $(-1, 1)$ 。

对 $|x| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2},$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

目标级数多了 x^2 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)x^n = x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}.$$

和函数:

$$S(x) = x^2 \cdot \frac{2}{(1-x)^3} = \frac{2x^2}{(1-x)^3}, \quad x \in (-1, 1).$$

代入 $x = \frac{1}{3}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)}{3^n} = S\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2/9}{8/27} = \frac{3}{4}.$$



必须抓住的三步

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

求导/积分 $\implies$ 凑通项 $\implies$ 代特殊值.



题: 分拆求和

求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + n \right) x^n$ 的收敛域并求其和函数。

先拆分:

$$S(x) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}}_{S_1(x)} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} nx^n}_{S_2(x)}.$$

第一部分用积分:

$$S_1(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-x).$$

端点检验给出 S_1 的收敛域: $[-1, 1)$ 。

第二部分用求导:

$$S_2(x) = x \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' = x \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

S_2 两端点均发散, 收敛域为 $(-1, 1)$ 。

$$[-1, 1) \cap (-1, 1) = (-1, 1).$$

$$S(x) = -\ln(1-x) + \frac{x}{(1-x)^2}, \quad x \in (-1, 1).$$

- **Abel 定理:** 已知某点收敛 $\Rightarrow$ 内部点绝对收敛。
- **求 R :** 比值法 $\rho = \lim |a_{n+1}/a_n|, R = 1/\rho$ 。
- **端点检验:** Leibniz 法、 p -级数等, 决定开/闭区间。
- **和函数:** 从 $\frac{1}{1-x} = \sum x^n$ 出发, 求导或积分后代入特殊值。

下节预告: 函数的幂级数展开