

12-4 函数的幂级数展开

第十二章 无穷级数

张振



厦门大学嘉庚学院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

- 1 Taylor 展开与 Maclaurin 展开
- 2 展开技巧
- 3 综合例题

先明确“展开”的含义

PART 1

定义

若在 x_0 附近有

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

则称 $f(x)$ 在 x_0 处**展开成幂级数**。

展开的目标:找系数 a_n 和收敛范围。

- 多项式最容易计算。
- 幂级数可逐项求导、积分。
- 特殊值可转化为数值级数求和。

关键词

函数 $\longrightarrow$ 幂级数

幂级数 $\longrightarrow$ 计算

Taylor 公式

若 $f(x)$ 可在 x_0 附近展开成幂级数, 则

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

$x_0 = 0$ 时, 称为 **Maclaurin 展开**。



$$1. \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in (-1, 1)$$

$$2. e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$3. \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$4. \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$5. \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \quad x \in (-1, 1]$$

$$6. (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad x \in (-1, 1)$$

$$\text{其中 } \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}, \binom{\alpha}{0} = 1.$$

使用建议

先认标准式,再做代换;有理函数优先靠拢 $\frac{1}{1-x}$ 。

先抓住一个母公式

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots, \quad |x| < 1.$$

有理函数展开时, 优先想办法凑成 $\frac{1}{1-\square}$ 。

- e^x : 各次幂都有, 分母按阶乘走。
- $\sin x$ 只取奇次幂, $\cos x$ 只取偶次幂, 符号都是正负交替。

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots, \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots, \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

$\ln(1+x)$: 由 $\frac{1}{1+x}$ 积分得到

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

记忆点: 正负交替, 分母就是次数。



$(1+x)^{\alpha}$:系数按下降乘积生成

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots$$

记忆点:上面逐步减 1,下面是阶乘。

变量代换与部分分数分解

PART 2

核心思路

$$f(x) \longrightarrow \frac{1}{1-\square}, \ln(1+\square), e^{\square}, \sin \square, \cos \square.$$

题: 典型示范

将 $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ 展成 x 的幂级数, 并求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$ 。

1. 从基本展开出发:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1.$$

2. 两端求导:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n, \quad |x| < 1.$$

3. 令 $x = \frac{1}{2}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 4.$$

核心思路

$$\text{有理分式} \longrightarrow \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \cdots$$

分别化成 $\frac{1}{1-\square}$ 型后展开。

若题目要求展成 $(x - x_0)$ 的幂级数, 先令

$$t = x - x_0.$$



题:部分分数 + 变量代换

将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 3}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数。



1. 因式分解:

$$x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3).$$

2. 部分分数:

$$\frac{1}{(x+1)(x+3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} \right).$$

3. 令 $t = x - 1$, 则 $x + 1 = t + 2, x + 3 = t + 4$ 。



由 $t = x - 1$, 有

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{t+2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+t/2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{t}{2}\right)^n, \quad |t| < 2,$$

$$\frac{1}{x+3} = \frac{1}{t+4} = \frac{1}{4} \frac{1}{1+t/4} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{t}{4}\right)^n, \quad |t| < 4.$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2^{n+2}} - \frac{1}{2^{2n+3}} \right) (x-1)^n, \quad |x-1| < 2.$$



题:移心展开

将 $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$ 展成 $x + 3$ 的幂级数。

1. 因式分解与部分分数:

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$$

2. 令 $t = x + 3$, 则 $x + 1 = t - 2, x + 2 = t - 1$:

$$\frac{1}{x+1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-t/2} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{2^n}, \quad |t| < 2$$

继续展开:

$$\frac{1}{x+2} = -\frac{1}{1-t} = -\sum_{n=0}^{\infty} t^n, \quad |t| < 1.$$

合并并取交集 $|t| < 1$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) (x+3)^n, \quad |x+3| < 1.$$

展开 + 特殊值：双重收益

PART 3

函数形式	推荐方法	出发公式
$\frac{1}{1 \pm \square}$	直接代换	$\sum x^n$
有理分式(可因式分解)	部分分数	$\sum x^n$
含 $\ln$	凑 $\ln(1 + \square)$	$\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$
含 $e^{\square}$	直接代换	$\sum \frac{x^n}{n!}$
$1/(1-x)^2$ 型	求导	由 $\sum x^n$ 导出

题:综合应用

将 $f(x) = -\ln(1-x)$ 展成 x 的幂级数,并求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^n}$ 的值。

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (|x| < 1).$$

两端从 0 到 x 积分:

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad |x| < 1.$$

$$\text{令 } x = \frac{1}{2}:$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} = -\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \ln 2.$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^n} = 2 \ln 2.$$

三步法

展开 $\implies$ 识别 $S(x_0)$ $\implies$ 代入.

代入前先确认 x_0 在收敛范围内。

- 12-1 概念与性质:部分和极限定义收敛;等比级数;必要条件($u_n \rightarrow 0$)。
- 12-2 审敛法:比较法(极限形式);比值法;根值法;Leibniz 法;绝对/条件收敛。
- 12-3 幂级数:收敛半径 R ;Abel 定理;端点检验;逐项求导/积分求和函数。
- 12-4 幂级数展开:六大基本展开式;变量代换;部分分数分解;展开求数值级数和。

复习时以审敛、幂级数和函数、函数展开为核心。