

12-5 傅里叶级数与级数总结

第十二章 无穷级数

张振



厦门大学嘉庚学院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

- 1 傅里叶级数的基本思想
- 2 傅里叶系数与收敛
- 3 正弦级数与余弦级数
- 4 第十二章总复习

用三角函数逼近周期函数

PART 1

幂级数:

- 用 $1, x, x^2, \dots$ 表示函数。
- 适合局部展开, 依赖展开中心。
- 非周期函数更常用。

傅里叶级数:

- 用 $1, \cos nx, \sin nx$ 表示函数。
- 适合周期函数和波形分解。
- 重点在系数计算与收敛值。

考试抓手

傅里叶级数题通常不是证明题, 而是判奇偶、算系数、写展开、取端点平均值。

定义

对 2π 周期函数, 若可用三角函数表示为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

这个三角级数称为 $f(x)$ 的**傅里叶级数**。

目标: 求 a_n, b_n , 再判断级数收敛到哪里。

在区间 $[-\pi, \pi]$ 上, 基本三角函数系为

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$$

类比

幂级数用 $1, x, x^2, \dots$; 傅里叶级数用 $1, \cos nx, \sin nx$.

在 $[-\pi, \pi]$ 上,有

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n \neq 0, \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n, \end{cases} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0.$$



核心理解

正交性让每个三角方向的系数可以被单独提取。

所以系数由积分给出:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

会算系数，还要知道收敛到哪里

PART 2

若 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上可积, 则

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

注意: 易错点

常数项写成 $\frac{a_0}{2}$, 不是 a_0 。

若函数定义在 $[-l, l]$ 上, 则

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$

其中

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

收敛结论

若 $f(x)$ 以 2π 为周期, 并在一个周期内分段光滑, 则其傅里叶级数在点 x 处收敛于

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

- 连续点: 收敛到 $f(x)$ 。
- 跳跃间断点: 收敛到左右极限的平均值。
- 端点按周期延拓后的左右极限处理。

注意:常见扣分点

傅里叶级数展开后,不能默认处处等于 $f(x)$ 。在跳跃点处,等于左右极限平均值。

若在 x_0 处

$$f(x_0 - 0) = A, \quad f(x_0 + 0) = B,$$

则傅里叶级数在该点的和为

$$\frac{A + B}{2}.$$

先看奇偶性，再决定算哪些系数

PART 3

偶函数

若 $f(-x) = f(x)$, 则傅里叶级数只含余弦项:

$$b_n = 0, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx.$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

奇函数

若 $f(-x) = -f(x)$, 则傅里叶级数只含正弦项:

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$



若只给出 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上:

- 展成正弦级数: 作奇延拓, 只算 b_n 。
- 展成余弦级数: 作偶延拓, 只算 a_n 。

一句话

正弦级数对应奇延拓, 余弦级数对应偶延拓。



■ 题: 奇函数的傅里叶级数

将 $f(x) = x$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上展开为傅里叶级数。

$f(x) = x$ 是奇函数, 所以

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0.$$

只需求

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx.$$

分部积分:

$$\int_0^{\pi} x \sin nx \, dx = \left[-\frac{x \cos nx}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{(-1)^{n+1} \pi}{n}.$$



因此

$$b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx, \quad -\pi < x < \pi.$$

在端点 $x = \pm\pi$ 处, 级数和等于左右极限平均值 0。

题: 利用傅里叶展开式求数值级数

利用

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

求级数

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

的和。

令 $x = \frac{\pi}{2}$, 则

$$\sin \frac{n\pi}{2} = 1, 0, -1, 0, \dots$$

代入展开式:

$$\frac{\pi}{2} = 2 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right).$$

因此

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$



题: 偶函数的傅里叶级数

将 $f(x) = x^2$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上展开为傅里叶级数。

$f(x) = x^2$ 是偶函数, 所以 $b_n = 0$ 。

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}.$$

对 a_n , 有

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx.$$

两次分部积分可得

$$a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}.$$



因此

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx, \quad -\pi < x < \pi.$$

用途

这类展开常用于求 $\sum 1/n^2$ 、 $\sum (-1)^n/n^2$ 等数值级数。

题: 利用 x^2 的傅里叶级数

由

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 。

令 $x = \pi$ 。此时 $\cos n\pi = (-1)^n$, 并且端点处收敛到 $f(\pi) = \pi^2$ 。

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^n}{n^2}.$$

所以

$$\frac{2\pi^2}{3} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

从知识结构到解题流程

PART 4

- **常数项级数**: 定义、性质、必要条件。
- **审敛法**: 比较、比值、根值、Leibniz。
- **任意项级数**: 绝对收敛与条件收敛。
- **幂级数**: 收敛半径、收敛域、Abel 定理。
- **和函数**: 逐项求导与积分。
- **函数展开**: Taylor、间接展开、傅里叶级数。



拿到常数项级数先问四件事

1. 通项是否趋零？若不趋零，直接发散。
2. 是否正项级数？优先比较法、比值法、根值法。
3. 是否交错级数？检查 Leibniz 条件。
4. 是否任意项级数？先看绝对值级数是否收敛。

通项特征	优先方法	对比对象
含 n^α	p -级数比较	$\sum 1/n^p$
含指数、阶乘	比值法	$\lim u_{n+1}/u_n$
含 n 次方	根值法	$\lim \sqrt[n]{u_n}$
含三角小量	等价无穷小	$\sin x \sim x$

注意:零散记忆不如识别结构

先识别通项结构,再选判别法;不要所有题都硬套比值法。



题: 参数范围

设级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{2p}}$$

条件收敛, 求 p 的取值范围。

- 交错收敛要求 $\frac{1}{n^{2p}} \rightarrow 0$, 即 $2p > 0$ 。
- 绝对收敛对应 $\sum \frac{1}{n^{2p}}$ 收敛, 即 $2p > 1$ 。
- 条件收敛要求交错收敛但不绝对收敛。

$$0 < p \leq \frac{1}{2}.$$

题: 幂级数内部点

- 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = 2$ 处收敛, 则该级数在 $x = -1$ 处必定 ()。
- (A) 发散 (B) 条件收敛 (C) 绝对收敛 (D) 敛散性不确定

在 $x = 2$ 处收敛, 说明半径至少覆盖内部 $|x| < 2$ 。

$$|-1| = 1 < 2.$$

由 Abel 定理, 内部点处必定绝对收敛。

选 C.

题:逐项求导

求级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)x^n$$

的和函数,并求

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}$$

的和。

由

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

逐项求导可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)x^n = \frac{2x}{(1-x)^3}, \quad |x| < 1.$$

令 $x = \frac{1}{2}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n} = 8.$$



■ 题: 部分分数 + 变量代换

将函数

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 3}$$

展开成 $x - 1$ 的幂级数。

令 $t = x - 1$, 则

$$\frac{1}{x^2 + 4x + 3} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t+2} - \frac{1}{t+4} \right).$$

因此

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2^{n+2}} - \frac{1}{2^{2n+3}} \right) (x-1)^n,$$

$$|x-1| < 2.$$

三层框架

基础层:定义、性质、必要条件、基本级数。

方法层:审敛法、收敛域、逐项求导积分、展开方法。

应用层:和函数、数值级数求和、傅里叶系数与收敛值。

复习时以**结构识别**为主:先判断知识模块,再选择对应方法。