

第七章微分方程专题复习 (学生版)

MatNoble

2026 年 6 月 11 日

目录

复习导引	3
1 考点一:概念相关	4
知识点汇总	4
经典例题讲解	4
例题变式	5
2 考点二:可分离变量的微分方程	6
知识点汇总	6
经典例题讲解	6
例题变式	6
3 考点三:一阶线性微分方程	8
知识点汇总	8
经典例题讲解	8
例题变式	9
4 考点四:可降阶的微分方程	10
知识点汇总	10
经典例题讲解	10
例题变式	11

5 考点五:二阶常系数齐次线性微分方程	11
知识点汇总	11
经典例题讲解	12
例题变式	13
6 考点六:二阶常系数非齐次线性微分方程	14
知识点汇总	14
经典例题讲解	15
例题变式	16

【免责声明】本讲义仅适用于大一学生的期末考试复习,未覆盖高等数学的所有知识点。

复习导引

本讲义围绕期末复习中第七章的六类高频考点展开：

1. 概念相关：阶、通解、任意常数、函数线性无关；
2. 可分离变量的微分方程；
3. 一阶线性微分方程；
4. 可降阶的微分方程；
5. 二阶常系数齐次线性微分方程；
6. 二阶常系数非齐次线性微分方程。

1 考点一:概念相关

知识点汇总

1. **阶:**微分方程中出现的最高阶导数的阶数,称为微分方程的阶。
2. **通解:** n 阶微分方程的通解通常含有 n 个独立任意常数。
3. **特解:**由初始条件或边界条件确定任意常数后得到的解。
4. **线性微分方程:**关于未知函数 y 及其各阶导数 $y', y'', \dots$ 均为一次,且它们之间不相乘、不复合非线性函数。
5. **齐次与非齐次:**线性方程右端为 0 时称为齐次方程;右端不为 0 时称为非齐次方程。
6. **初值条件:** n 阶方程通常需要 n 个独立初值条件来确定一个特解。
7. **线性无关:**若 $C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n = 0$ 只在 $C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$ 时成立,则函数组线性无关。

经典例题讲解

1. 微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3x \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 2xy = x + 2$$

的通解含有 _____ 个独立的任意常数。

2. 微分方程

$$(y'')^5 + 6y^{(4)} - 5x(y')^3 + x^8 = 2$$

是 _____ 阶微分方程。

例题变式

1. 方程 $y'' + xy' + \sin y = x$ 是不是线性微分方程？

2. 判断函数组 e^x, e^{2x} 是否线性无关。

2 考点二:可分离变量的微分方程

知识点汇总

1. 标准形式:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y).$$

2. 核心步骤:

$$\frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx, \quad \int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx + C.$$

3. 注意常数解:分离变量时若除以含 y 的因子,需留意该因子为 0 时是否给出常数解。

经典例题讲解

1. 求微分方程

$$y' \tan x = y$$

的通解。

例题变式

1. 求微分方程 $y' = 2xy$ 的通解。

2. 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$ 的通解。

3 考点三：一阶线性微分方程

知识点汇总

1. 标准形式：

$$y' + p(x)y = q(x).$$

2. 积分因子：

$$\mu(x) = e^{\int p(x) dx}.$$

3. 齐次方程 $y' + p(x)y = 0$ 的通解为

$$y = Ce^{-\int p(x) dx}.$$

4. 通解公式：

$$y = e^{-\int p(x) dx} \left[\int q(x) e^{\int p(x) dx} dx + C \right].$$

5. 做题流程：先化为标准形式，再找 $p(x)$ ，算积分因子，最后代初值。

6. 若方程可整理为 $y' = f(x)y$ ，它既是一阶线性齐次方程，也可直接按可分离变量方程处理。

经典例题讲解

1. 求一阶微分方程

$$y' - 3x^2y = y, \quad y(0) = 4$$

的特解。

例题变式

1. 求微分方程 $y' + y = e^{-x} \cos x, y(0) = 0$ 的特解。

4 考点四:可降阶的微分方程

知识点汇总

1. 若方程形如

$$y^{(n)} = f(x),$$

则连续积分 n 次。

2. 若方程不含 y , 即形如 $F(x, y', y'') = 0$, 令

$$p = y', \quad y'' = p'.$$

此时把 p 看作 x 的函数。

3. 若方程不含 x , 即形如 $F(y, y', y'') = 0$, 令

$$p = y', \quad y'' = p \frac{dp}{dy}.$$

此时把 p 看作 y 的函数。

经典例题讲解

1. 微分方程

$$y''' = e^{-x} + \sin x$$

的通解为 _____。

例题变式

1. 求微分方程

$$xy'' - y' = 0 \quad (x \neq 0)$$

的通解。

2. 求微分方程

$$yy'' = (y')^2$$

的通解。

5 考点五：二阶常系数齐次线性微分方程

知识点汇总

1. 标准形式：

$$y'' + py' + qy = 0.$$

2. 特征方程：

$$r^2 + pr + q = 0.$$

3. 解题关键:先写特征方程,再按特征根类型写通解;初值题最后代入 $y(0), y'(0)$ 解常数。

4. 两个不等实根 r_1, r_2 :

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}.$$

5. 二重实根 r :

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{rx}.$$

6. 共轭复根 $\alpha \pm \beta i$:

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

经典例题讲解

1. 通解为

$$y = (C_1 + C_2 x) e^x$$

的二阶常系数齐次线性微分方程为 _____。

2. 求微分方程

$$y'' + y' - 2y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0$$

的特解。

例题变式

1. 求微分方程 $y'' - 4y' + 4y = 0$ 的通解。

6 考点六:二阶常系数非齐次线性微分方程

知识点汇总

1. 非齐次线性方程通解结构:

$$y = y_h + y_p,$$

其中 y_h 是对应齐次方程通解, y_p 是非齐次方程的一个特解。

2. 若已知同一个非齐次线性方程的两个特解 y_1, y_2 , 则 $y_1 - y_2$ 是对应齐次方程的解。

3. 若右端可分解为 $f_1(x) + f_2(x)$, 可分别求两个特解 y_{p1}, y_{p2} , 再取

$$y_p = y_{p1} + y_{p2}.$$

4. 对常见右端

$$f(x) = P_m(x)e^{\lambda x},$$

其中 $P_m(x)$ 为 m 次多项式, 特解通常设为

$$y_p = x^k Q_m(x)e^{\lambda x},$$

其中 $Q_m(x)$ 取为 m 次待定多项式。参数 k 按 λ 与特征根的关系确定:

λ 与特征根的关系	k	修正因子
λ 不是特征根	0	1
λ 是单特征根	1	x
λ 是二重特征根	2	x^2

例如右端为 $(x+1)e^x$ 时, $m=1$, 所以 $Q_m(x) = Ax + B$ 。

5. 对常见右端

$$f(x) = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos \omega x + P_n(x) \sin \omega x],$$

特解通常设为

$$y_p = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos \omega x + R_m^{(2)}(x) \sin \omega x],$$

其中 $m = \max(l, n)$, $R_m^{(1)}(x)$, $R_m^{(2)}(x)$ 均取为 m 次待定多项式。参数 k 按复数 $\lambda + \omega i$ 与特征根的关系确定：

$\lambda + \omega i$ 与特征根的关系	k
$\lambda + \omega i$ 不是特征根	0
$\lambda + \omega i$ 是特征根	1

对二阶实系数方程, 若 $\lambda + \omega i$ 是特征根, 则 $\lambda - \omega i$ 也同时是特征根。

经典例题讲解

1. 求二阶微分方程

$$y'' + y' - 2y = (x + 1)e^x$$

的通解。

2. 已知 $y_1 = x^2$, $y_2 = e^{-2x} + x^2$, $y_3 = e^{3x} + x^2$ 是方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

的三个特解, 则该方程的通解可表示为 _____。

例题变式

1. 设 $y'' - y = e^x$, 写出待定特解的形式。

2. 求微分方程

$$y'' - 2y' + y = e^x + x$$

的通解。