

9-1 多元函数的基本概念

第九章 多元函数微分学

张振



厦门大学嘉庚学院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

- 1 平面点集·拓扑基础
- 2 多元函数定义与几何意义
- 3 多元函数的极限
- 4 多元函数的连续性

平面点集 · 拓扑基础

PART 1

点与距离: 设平面内两点 $P(x, y)$ 与 $P_0(x_0, y_0)$, 欧氏距离度量为:

$$\rho(P, P_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

邻域定义: 以 P_0 为中心, $\delta > 0$ 为半径的圆内点集称为 δ 邻域:

$$U(P_0, \delta) = \{P \mid \rho(P, P_0) < \delta\}$$

注: 去心邻域 $\overset{\circ}{U}(P_0, \delta)$ 则表示 $0 < \rho(P, P_0) < \delta$ 。

哲学思辨

拓扑基石: 从孤立到关联

要想研究时空中某一点处的极致属性 (如连续性), 我们必须考察在点周围一个极小但却确切存在的发展环境。概念上的“邻域”, 就是为探讨无穷逼近过程所设置的观测雷达。

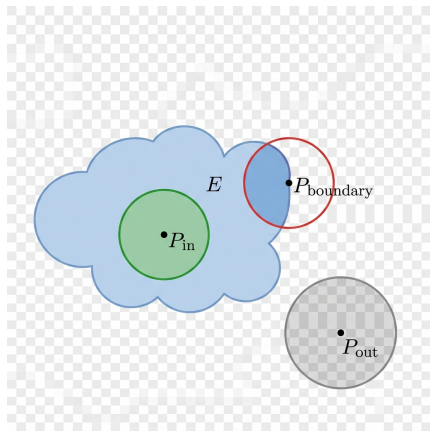


图:三类点的逻辑分布

- **内点 (Interior):** $\exists \delta > 0$, 使得 $U(P_0, \delta) \subset E$ 。
点在内部, 完全被集合包裹。
- **外点 (Exterior):** $\exists \delta > 0$, 使得 $U(P_0, \delta) \cap E = \emptyset$ 。
点在外部, 与集合完全疏离。
- **边界点 (Boundary):** $\forall \delta > 0$, $U(P_0, \delta)$ 既含有 E 的点也含有 E^c 的点。
无论范围多小, 邻域内总有正反两派。

逻辑判定:

- **开集 (Open Set):** 不含任何边界点 ($\partial E \cap E = \emptyset$)。即: 所有点均为内点。
- **闭集 (Closed Set):** 包含其所有边界点 ($\partial E \subset E$)。

连通区域 (Region):

- **连通性:** 任意两点可用集合内的折线相连。
- **区域:** 连通的开集。

哲学思辨

边界即主权

开集如同无主权的公海, 没有任何边界点属于它;
闭集则是拥有完整颗粒度边界的领土。
在工科计算中, 我们多在“开集”内求导, 在“闭集”上求极值。

跨界隐喻

地图连通性

区域就像是一个“相连的国家”, 内部没有无法逾越的深渊, 且在每一个点都有向四周自由移动的余地 (开集属性)。



■ 题:判定集合属性

求 $D = \{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$ 的拓扑属性。



解析步解:

- 内部边界: $x^2 + y^2 = 1$ (不含, 虚线表示)
- 外部边界: $x^2 + y^2 = 4$ (包含, 实线表示)

注意: 判定结论与口诀

该集合属于 **连通开集 + 部分边界**, 故它是一个 **区域**, 既非开集亦非闭集。

工科速记口诀:

- 边界全在大本营 $\implies$ **闭集** (Closed)
- 边界全在屋檐外 $\implies$ **开集** (Open)

题:判定集合属性

判定有理数点集 $E = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ 的拓扑性质。

哲学思辨

直觉的终点,定义的起点

面对这种“处处破碎”的集合,人类的肉眼和直觉会瞬间失灵。此时,严密的数学定义不是枯燥的条文,而是我们在思维迷雾中的“避雷针”和“指路牌”。

跨界隐喻

数字屏幕的“缝隙”

想象一个充满坏点的液晶屏幕,虽然远看是一片色彩,但只要你拿起无限倍率的显微镜(邻域 U),你会发现处处都是不发光的空隙(无理数点)。

1. 寻找内点 (Interior):

- 定义要求:存在 $\delta > 0$,使得 $U(P, \delta) \subset E$ 。
- 物理逻辑:要在 E 内找内点,就必须在 P 周围圈出一块“纯净”的、只含有有理数的领地。
- 判定:因为实数具有稠密性,任何 δ 邻域内都必然混入无理数。
- 结论: E 没有任何内点, $\overset{\circ}{E} = \emptyset$ 。

1. 寻找内点 (Interior):

- 定义要求:存在 $\delta > 0$, 使得 $U(P, \delta) \subset E$ 。
- 物理逻辑:要在 E 内找内点,就必须在 P 周围圈出一块“纯净”的、只含有有理数的领地。
- 判定:因为实数具有稠密性,任何 δ 邻域内都必然混入无理数。
- 结论: E 没有任何内点, $\overset{\circ}{E} = \emptyset$ 。

2. 判定边界 (Boundary):

- 定义要求:任何 $U(P, \delta)$ 既含有 E 的元素,也含有 E^c 的元素。
- 判定:在平面内任意取一点 $P(x, y)$, 无论划出的圆多小, 圆内既有有理点也有无理点。
- 结论:整个平面 $\mathbb{R}^2$ 都是它的边界, $\partial E = \mathbb{R}^2$ 。

纠正思维定势

- **误区:**认为边界必须是一条“线”。
- **事实:**边界可以填满整个平面。

最终性质判定:

- E 不含边界 $\implies$ 非闭集。
- E 不含内点 $\implies$ 非开集。
- 任何两点间无法用连续折线连接 $\implies$ 不连通。

方法论总结

面对这类“病态”集合,最快捷的解题路径是:
寻找邻域内的异类。

只要你能在任何范围内都找到反方,那么:

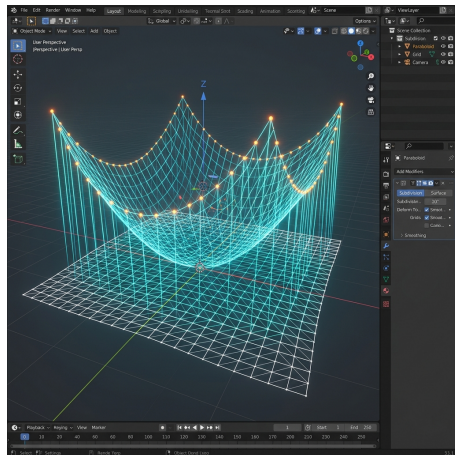
1. 这个点就不是内点。
2. 这个点一定是边界点。

多元函数定义与几何意义

PART 2

模型实例: $z = x^2 + y^2$

- 1. 采样 (Sampler): 在 XOY 平面生成离散网格点 P_i 。
- 2. 置换 (Displace): 根据算子 f 将网格点沿 Z 轴向上拉升。
- 3. 生成 (Render): 无数顶点形成连续的旋转抛物面。



等值线 (Level Sets): $f(x, y) = C$

- **概念:** 将函数值相等的点投影到 XOY 平面形成的曲线。
- **工程解读:** 在地形图中, 等高线反映了地势的陡峭程度。
- **规律:**
 - 线条密集 $\implies$ 坡度大 (梯度大)。
 - 线条稀疏 $\implies$ 地势平缓。

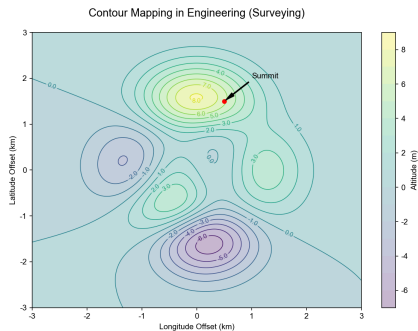


图: 基于二元函数生成的虚拟地形等高线图



题:求定义域与判定性质

求 $z = \ln(y - x) + \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ 的定义域并判定集属性。



解析步解:

1. 约束 1 (对数): $y - x > 0 \implies y > x$ (直线 $y = x$ 上方)。
2. 约束 2 (分母): $1 - x^2 - y^2 > 0 \implies x^2 + y^2 < 1$ (单位圆内部)。
3. 结论: 边界均不包含 $\implies$ 该集合为 **开集**。

多元函数的极限

PART 3

设 $f(P)$ 在 P_0 的去心邻域内有定义。若 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $0 < \rho(P, P_0) < \delta$ 时, 恒有:

$$|f(P) - A| < \epsilon$$

则称 A 为当 $P \rightarrow P_0$ 时的 **极限**, 记为 $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A$ 。

工科理解: 精度控制

ϵ 是误差极限, δ 是控制范围。无论误差要求多小, 只要靠得足够近, 函数值就能被锁入精度范围内。

维度爆发:从 2 到 ∞

- **一元极限:** 只有左、右 2 个逼近方向。
- **二元极限:** P 以 **任何方式** (直线、抛物线、甚至震荡曲线) 趋于 P_0 时极限都必须相同。

计算法则:证存在需用通法(如极坐标),证不存在只需找两条路径。

哲学思辨:变中求同

“极限存在”是一个极其严酷的契约。它要求在三维空间的波澜诡谲中,无论你从哪个胡同钻进原点,最终看到的风景必须一致。



- 核心思想:通过约分消除分母零点,或利用等价无穷小。
- 注意:二元等价替换 $f(u) \sim g(u)$ 的前提是复合项 $u(x, y) \rightarrow 0$ 。

题:基础变式练习

■ 计算 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x}$ 。

解析步解:

1. 观察当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时, $xy \rightarrow 0$ 。
2. 利用等价无穷小: $\sin(xy) \sim xy$ 。

$$\text{原式} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y = 0$$

注意:总结

对于二元极限,若分子分母存在明显的积形式,等价替换是第一选择。

- 适用:点趋于 $(0,0)$,且式中含有 $x^2 + y^2$ 相关项。
- 代换: $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 。
- 准则:若结果与 θ 无关,则极限存在;反之则不存在。

题:强化例题

■ 计算 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}.$

解析步解: 令 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时, $r \rightarrow 0^+$ 。

$$\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = \frac{r^3(\cos^3 \theta + \sin^3 \theta)}{r^2} = r(\cos^3 \theta + \sin^3 \theta)$$

由于 $|\cos^3 \theta + \sin^3 \theta| \leq 2$ 有界,

$$0 \leq |r(\cos^3 \theta + \sin^3 \theta)| \leq 2r \rightarrow 0$$

注意: 结论

由于极限结果恒为 0, 与进入原点的方向(角度 θ) 无关, 故该极限为 0。



题:变式练习

■ 计算 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \circ$

题:变式练习

计算 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$

解析步解: 令 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$,

$$\left| \frac{r^3 \cos \theta \sin^2 \theta}{r^2} \right| = |r \cos \theta \sin^2 \theta| \leq r \rightarrow 0$$

注意:总结

分子次数 ($1 + 2 = 3$) 高于分母次数 (2), 极限通常为 0。



- 判定:若直接计算由于 $\sin(1/\dots)$ 无法进行,考虑放缩。
- 关键:利用 $|f(x,y)| \leq g(x,y)$ 且 $g(x,y) \rightarrow 0$ 。

题:考研级练习

■ 计算 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$ 。

解析步解:

1. 观察: $\left| \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \right| \leq 1。$

2. 放缩: $0 \leq \left| \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \sin(\dots) \right| \leq \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}。$

3. 进一步简化: 由于 $x^2 \leq x^2 + y^2$, 故 $\frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq 1。$

$$0 \leq |f(x, y)| \leq y^2$$

当 $y \rightarrow 0$ 时, $y^2 \rightarrow 0$, 根据夹逼定理, 原极限为 **0**。



题:判定题

证明极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ 不存在。

证明:取路径 $L_1 : y = kx$, 则有:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = kx}} \frac{x(kx)}{x^2 + k^2 x^2} = \frac{k}{1 + k^2}$$

注意:判定结论

极限值依赖于路径的斜率 k 。

如沿 $y = x$ 时趋于 $1/2$, 而沿 $y = 0$ 时趋于 0 。

根据定义, 极限不存在。



题:判定题

证明极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ 不存在。

陷阱提示:若取 $y = kx$,结果均为 0。但这并不代表极限存在!

证明:

1. 取路径 $y = kx^2$, 代入原式:

$$\frac{x^2(kx^2)}{x^4 + (kx^2)^2} = \frac{kx^4}{x^4(1 + k^2)} = \frac{k}{1 + k^2}$$

2. 极限值仍依赖于系数 k 。由于沿不同抛物线趋于原点时极限不同, 故极限不存在。

注意: 方法论总结

如果你在所有直线路径上都得到相同结果, 不妨试试 **低阶补齐高阶** (令 $y = x^2$ 使分母次数一致)。

多元函数的连续性

PART 4

定义: 若 $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$, 则称函数在 P_0 处连续。

重要结论:

- 一切多元 **初等函数**在其定义域内连续。
- 闭区域上的连续函数具有 **有界性**与 **介值定理**。

数学逻辑观

局部与整体: 连续性建立了点与周围邻域的动态均衡。在后续学习中, 我们会发现, “连续”是“可微”的必要条件, 这种逻辑上的递进构建了微积分的严密大厦。

- **空间直观**: Blender 网格拉伸模型。
- **极限武器库**: 化简替换、极坐标、夹逼定理、路径法。
- **判别逻辑**: 证存在用“算”，证不存在用“挑(路径)”。

下节预告:多元函数偏导数