

# 9-2 偏 导 数

## 第九章 多元函数微分学

张 振



厦门大学嘉庚学院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

- 1 偏导数的基本概念与本质
- 2 偏导数的精准计算
- 3 高阶偏导数

# 偏导数的基本概念与本质

PART 1

### 数学基石:

设  $z = f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  的某一邻域内有定义。将  $y$  固定在  $y_0$ , 只让  $x$  有增量  $\Delta x$ :

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{P_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

同理,若固定  $x$ ,考察由  $y$  单独引起的改变率,即为对  $y$  的偏导数。

### 哲学思辨

世界是多元交织的,但在某一瞬间,我们为了理解系统的局部响应,必须强行“冻结”其它维度,去探究单一维度的孤立因果关系。这正是科学研究中最纯粹且强大的“控制变量法”。



### 题:极限定义中的比例系数

设  $z = f(x, y)$  且  $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} = a$ , 则求下述极限:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 3\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

解析步解:

1. **核心逻辑:**导数定义的本质是“函数增量”与“自变量增量”的比值。
2. **凑项法:**为了匹配定义,分母必须与分子括号内的改变量  $3\Delta x$  严格一致。

$$\begin{aligned}\text{原式} &= 3 \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 3\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{3\Delta x} \\ &= 3 \cdot \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} = 3a\end{aligned}$$

**注意:方法论指导**

看到  $\Delta x$  前有系数时,永远记得“配平”分母,多出来的系数就是最终的乘积因子。

### 直觉陷阱

在一元函数中,导数存在必连续;但在多元函数中,偏导数存在  $\nRightarrow$  连续。

### 原因剖析:

偏导数只保证了沿着坐标轴方向的趋近行为,并未涵盖通过其它路径(如直线、抛物线等)趋向该点的状态。

Counterexample: Partial Derivatives Exist but Function is Discontinuous

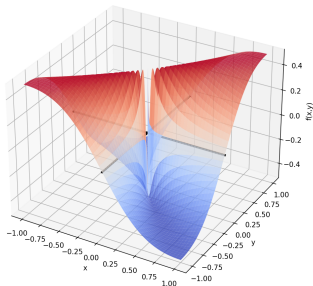


图:反例:偏导在中心皆为 0,但曲面突跳不连续

- **整体系统:** 三维曲面  $z = f(x, y)$ 。
- **强行固定:** 令  $y = y_0$ , 在空间几何上相当于用一堵平面  $y = y_0$  对整个空间切下了一刀。
- **降维切痕:** 此时曲面在这堵平整墙面上留下了一条交线。偏导数的本质就是这条交线在  $(x_0, y_0)$  处的切线斜率。

### 注意: 医学成像视角

就像 CT 扫描, 为了了解人体, 我们必须一层层进行平面切割。求算偏导数, 其实就是微积分几何里的 CT 切片技术。

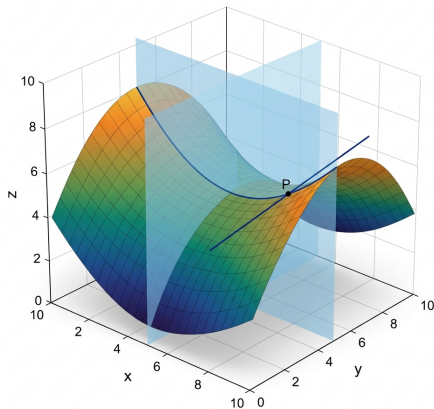


图: 三维曲面的平面切片与偏导数几何意

工业设计场景: 零件尺寸  $L(x, y)$

- **背景:** 假设一个零件的最终长度受温度  $x$  和压力  $y$  共同影响。
- **偏导意义:**  $\frac{\partial L}{\partial x}$  衡量了零件对温度波动的“敏感度”。
- **结论:** 在精密制造中,我们通过求偏导数来确定哪个环境因子最容易导致产品超差,从而优先控制该维度的波动。

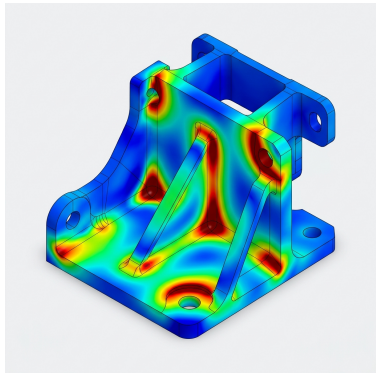


图:敏感度热力图:偏导数绝对值越大,颜色越深

# 偏导数的精准计算·阶梯式通关

PART 2

**操作准则:**求对  $x$  的偏导数时,把  $y$  视同为无生命的常数铁块! 直接套用一元函数的求导公式矩阵即可。

### ■ 题:基础求导练习

计算  $z = e^x \sin y + x^2 y^3$  的一阶偏导数。

解析步解:

- 求  $z_x$ : 此时  $\sin y$  是常数,  $y^3$  也是常数。

$$z_x = \frac{\partial(e^x \sin y)}{\partial x} + \frac{\partial(x^2 y^3)}{\partial x} = e^x \sin y + 2xy^3$$

- 求  $z_y$ : 此时  $e^x$  是常数,  $x^2$  也是常数。

$$z_y = \frac{\partial(e^x \sin y)}{\partial y} + \frac{\partial(x^2 y^3)}{\partial y} = e^x \cos y + 3x^2 y^2$$



### 题:联合运算结果判定

设函数结构为:

$$z = x^2 e^y + (x - 1) \arctan \frac{y}{x}$$

求:  $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,0)} + \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(1,0)}$  的最终结果。

**解析拆解 (对  $x$  求导):** 由于  $z$  是两项相加, 我们分项攻克:

1. 第一项  $\partial_x(x^2 e^y) = 2xe^y$ 。
2. 第二项是乘积:  $\partial_x[(x-1)\arctan(y/x)] = 1 \cdot \arctan(y/x) + (x-1) \cdot (\dots)$ 。

将  $(1, 0)$  带入上述结构:

- $2xe^y \rightarrow 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$ 。
- $\arctan(0) \rightarrow 0$ 。
- $(x-1) \rightarrow (1-1) = 0$ , 导致最复杂的导数项瞬间消失!

故:  $z_x(1, 0) = 2$ 。

解析拆解 (对  $y$  求导):

1.  $\partial_y(x^2 e^y) = x^2 e^y \rightarrow 1^2 \cdot 1 = 1。$

2.  $\partial_y[(x-1) \arctan(y/x)] = (x-1) \cdot \frac{1}{1+(y/x)^2} \frac{1}{x} \rightarrow (1-1) \cdot (\dots) = 0。$

故:  $z_y(1, 0) = 1。$

最终结果:  $2 + 1 = 3。$

### 注意: 心智模型: 点位前瞻压缩

在求多元函数在某点处的偏导数时, **先观察结构**。如果某一项包含  $(x - x_0)$  且该项只需要对  $y$  求导, 那么代入点后它通常会变为 0, 从而豁免了繁琐的链式推导。



■ 题:求  $f'_x(0,0,0)$

设  $f(x,y,z) = \frac{x \cos y + y \cos z + z \cos x}{1 + \cos x + \cos y + \cos z}$ , 求其在原点对  $x$  的偏导数。

**策略选择:**先行固定法为了求  $f_x(0, 0, 0)$ , 根据定义, 我们实际上是在研究一元函数  $g(x) = f(x, 0, 0)$  的导数。

1. **第一步: 变量冻结。** 令  $y = 0, z = 0$ :

$$f(x, 0, 0) = \frac{x \cdot 1 + 0 + 0}{1 + \cos x + 1 + 1} = \frac{x}{3 + \cos x}$$

2. **第二步: 一元求导。**

$$\begin{aligned} f_x(0, 0, 0) &= \left. \frac{d}{dx} \left( \frac{x}{3 + \cos x} \right) \right|_{x=0} \\ &= \left. \frac{1 \cdot (3 + \cos x) - x \cdot (-\sin x)}{(3 + \cos x)^2} \right|_{x=0} = \frac{3 + 1 - 0}{4^2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$



### 题:坐标轴上的偏导判定

■ 设  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 y)}{xy}, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$ , 求  $f_x(0, 1)$ 。

**解析步解:**对于分段点,只能回到定义进行最原始的极限收敛测试。

1. 构造定义极限:  $f_x(0, 1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 1) - f(0, 1)}{x}$ 。

2. 代入  $y = 1$  时的函数结构:

$$f_x(0, 1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(x^2 \cdot 1)}{x \cdot 1} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2}$$

3. 根据重要极限结果,该值为 1。

### 注意:避坑指南

绝对不要试图先求出非零区域的导函数再强行带入。这在分段点处往往会导致严重的逻辑错误或计算陷阱。

# 高阶偏导数：导数的再演化

PART 3

### 核心逻辑:

设函数  $z = f(x, y)$  具有偏导数  $f_x(x, y)$  与  $f_y(x, y)$ 。

因为这两个导函数依然是  $x$  和  $y$  的函数,所以我们可以继续对它们求偏导数!这就产生了一共 **4** 个二阶偏导数:

### 算子与符号规范

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{xy}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{yx}(x, y)$$

### 注意:注意求导顺序

混合偏导数下角标  $f_{xy}$  是从左往右读:先对  $x$ ,后对  $y$  求导。而莱布尼茨算子  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$  则是在分母从右往左读:先  $x$  后  $y$ 。这两者表示的执行顺序一致,但在排版书写方向上刚好相反。

## ■ 题:基础刻意练习

■ 计算  $z = x^3y^2 - e^{2x}$  的四个二阶偏导数。

第一步:求一阶导 (控制变量思维)

$$z_x = 3x^2y^2 - 2e^{2x}, \quad z_y = 2x^3y$$

第二步:对一阶导再套偏导算子

■ 纯偏导:  $z_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2 - 2e^{2x}) = 6xy^2 - 4e^{2x}$ ,  $z_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(2x^3y) = 2x^3$

■ 混合偏导:  $z_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2 - 2e^{2x}) = 6x^2y$

■ 混合偏导:  $z_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(2x^3y) = 6x^2y$

### 克莱罗定理 (Clairaut's Theorem)

**发现规律:** 在刚才的计算中神奇地发现  $z_{xy} = z_{yx}$ ! 这并非巧合。  
如果函数  $z = f(x, y)$  的两个二阶混合偏导数在区域内连续, 则在此区域必然存在:

$$f_{xy} = f_{yx}$$

**计算启示:** 求导顺序允许交换, 实战中可选择“最易消除复杂变量”的路径先进行求导! 这大幅降低了我们的计算量。

### 注意: 反例探究: 皮亚诺反例 (Peano's Counterexample)

考察分段函数(专门构造的连续但不具备二阶混合偏导连续性的数学刺客):

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

当  $(x, y) \neq (0, 0)$  时, 它的两个一阶偏导数分别为(有兴趣可课后自行验证):

$$f_x(x, y) = y \frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f_y(x, y) = x \frac{x^4 - 4x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

**灵魂拷问:** 在 origin  $(0, 0)$  处, 混合偏导数  $f_{xy}(0, 0)$  和  $f_{yx}(0, 0)$  还相等吗?

我们只能按**导数定义**在原点硬算。先求原点沿轴向的一阶偏导：

将  $x = 0$  代入得  $f_x(0, y) = y \frac{-y^4}{y^4} = -y$ 。同理  $f_y(x, 0) = x \frac{x^4}{x^4} = x$ 。

进而在原点求二阶混合偏导数(注意定义式分母为步长)：

■ 先  $x$  后  $y$ :  $f_{xy}(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f_x(0, \Delta y) - f_x(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-\Delta y - 0}{\Delta y} = -1$

■ 先  $y$  后  $x$ :  $f_{yx}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f_y(\Delta x, 0) - f_y(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x - 0}{\Delta x} = 1$

**惊人结论:  $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$ !**

(原因正出在它的二阶混合偏导数在  $(0, 0)$  点并不连续, 定理前提失效。)

有了基础框架,让我们来挑战复合算子的极限。

### 题:幂指函数的动态偏导交错

设多元空间函数构建为  $u = x^{\frac{y}{z}}$ , 试求混合偏导数:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}$$

(提示:从右向左解读算子,先对  $x$  施加算子,再对  $z$  施加算子)。

这是一道经典的“三层复合结构”，我们需要使用剥洋葱的策略：

1. **内层算子(先对  $x$  处理)**: 此时视  $y, z$  为常数铁块。整体结构退化为典型的幂函数  $x^n$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{z} x^{\frac{y}{z}-1}$$

2. **外层算子(对  $z$  施加算子)**: 此时  $x, y$  被锁定。观察内层结果结构, 常数系数  $\frac{y}{z}$  中包含  $z$ , 指数位置  $\frac{y}{z} - 1$  也包含  $z$ 。此为乘积求导法则!

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ y \cdot z^{-1} \cdot x^{y z^{-1} - 1} \right] \\ &= y(-z^{-2})x^{\frac{y}{z}-1} + \frac{y}{z} \cdot x^{\frac{y}{z}-1} \cdot \ln x \cdot \left(-\frac{y}{z^2}\right) \end{aligned}$$

最终提取公共成分  $x^{\frac{y}{z}-1}$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = -\frac{y}{z} x^{\frac{y}{z}-1} \left( 1 + \frac{y}{z} \ln x \right)$$

- **底层逻辑:**控制变量法,强行在三维时空中切出二维截面(CT 切片)。
- **计算三部曲:**
  1. 首先观察是否为分段点  $\implies$  必须用定义法。
  2. 观察是否涉及特定点数值  $\implies$  利用特定点位压缩计算项。
  3. 普适计算  $\implies$  视其余变量为铁块,直接套公式。
- **工程实践:**偏导数即为“灵敏度”,指导我们寻找系统波动的核心风险点。

**下节导思:从单点偏导走向多维时空的合成——全微分**