

9-3全微分

第九章多元函数微分学

张振



厦门大学嘉庚学院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

- 1 全微分的几何灵魂与定义
- 2 全微分的精准算法
- 3 全微分的应用

全微分的几何灵魂与定义

PART 1

一元函数回顾:

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$$

这里的 $f'(x)\Delta x$ 正是以直代曲的“线性主部”。

多元函数全增量:

设 $z = f(x, y)$, 全增量为:

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

如果可以写成:

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$$

其中 $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, 则称其为全微

分。
高等数学

哲学思辨

局部线性论 (Local Linearity)

无论宏观宇宙多么崎岖复杂, 在无限微小的局部, 事物总是趋于平整的线性。微积分的使命, 就是抓取这瞬间的平直。

- **宏观曲面**:多维数学中的复杂函数。
- **微观切片**:航天服外壳在宏观是起伏不定的。
- **全微分映射**:但在高倍显微镜下,每一根交叉的纤维所构建出的局部网格,都是一个**近乎完美的平面**(全微分)。

注意:几何心智

全微分 dz 对应的是该点处“切平面”的抬升高度。

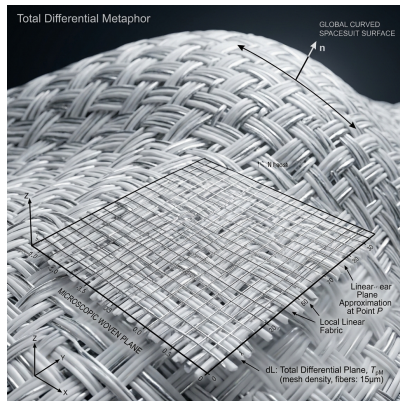


图:网格平面:全微分的线性拟合

逻辑关系递进与误区:

- ⇒ **最强核心:**可微意味着函数有极好的拟合平面,必然连续且偏导存在。
- ⇒ **可微充要前提:**若偏导数连续,则函数必然可微。
- ⇏ **经典陷阱:**仅“偏导存在”无法推导“连续”。仅“连续”也无法推导“偏导存在”。

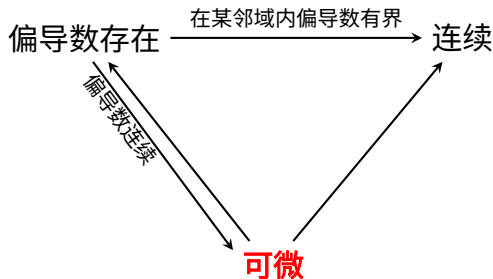


图:多元函数在某点处的连、偏、微三角判定图



题:隐秘的折点

考察函数 $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ 在原点 $(0, 0)$ 处的性质。
请严谨探究它在原点是否连续? 偏导数是否存在? 最后判定是否可微?

第一步:探测连续性

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{|xy|} = 0 = f(0,0)$, 显然函数在原点连续。

第二步:探测一阶偏导数存在性

面对绝对值无法直接代公式, 必须回退至**导数定义**沿轴硬算:

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0$$

对称性同理:

$$f_y(0,0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = 0$$

这说明沿着 x 轴和 y 轴看, 山脉不仅有路, 而且切线很平!

第三步:探究可微性

若函数在原点可微,那么其余误差(非线性部分)除以 ρ 必须为极限 0:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta z - [f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y]}{\rho} = 0$$

代入已知得:

$$\text{极限} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|} - 0}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

取特殊逼近路径,令沿 $y = x$ 逼近(即 $\Delta y = \Delta x \rightarrow 0$):

$$\text{沿对角线} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|\Delta x|^2}}{\sqrt{2(\Delta x)^2}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\sqrt{2}|\Delta x|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$$

由于残差项不能化为高阶无穷小,结论得证:函数连续且偏导存在,却依然在原点不可微!

全微分的精准算法·算子合并

PART 2

如果函数 $f(x, y)$ 的偏导数存在且连续, 则全微分为:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

操作口诀:

1. 固定 y , 对 x 求偏, 随后贴上标签 dx 。
2. 固定 x , 对 y 求偏, 随后贴上标签 dy 。
3. 两路合并, 即得全貌。



■ 题:求 dz 在 $(1, 2)$ 处的值

设 $z = \frac{x+y}{x-y}$, 求其在 $(1, 2)$ 点处且当 $dx = 0.01, dy = 0.02$ 时的全微分。

解析步解:

1. 求导函数结构:

$$z_x = \frac{1(x-y) - 1(x+y)}{(x-y)^2} = \frac{-2y}{(x-y)^2} \Big|_{(1,2)} = \frac{-4}{1} = -4$$

$$z_y = \frac{1(x-y) - (-1)(x+y)}{(x-y)^2} = \frac{2x}{(x-y)^2} \Big|_{(1,2)} = \frac{2}{1} = 2$$

2. 代入微分增量:

$$dz = (-4) \cdot 0.01 + 2 \cdot 0.02 = -0.04 + 0.04 = 0$$



题:求函数全微分

计算函数 $z = \sin(xy) + x^2y$ 的全微分。

解析步解:

1. 求 $\partial z / \partial x$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cos(xy) + 2xy$$

2. 求 $\partial z / \partial y$:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x \cos(xy) + x^2$$

3. 合并结果:

$$dz = (y \cos(xy) + 2xy)dx + (x \cos(xy) + x^2)dy$$



题: 极度嵌套的挑战

已知复杂函数 $z = e^{x^2+y^2} \sin(xy)$, 求它的全微分 dz 。

遇到乘积、指数加上三角函数的巨石,利用乘积法则,结构化拆解:

1. 对 x 求偏,锁死 y 为常量:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (e^{x^2+y^2} \cdot 2x) \sin(xy) + e^{x^2+y^2} (y \cos(xy))$$

合并同类提取公因子:

$$= e^{x^2+y^2} [2x \sin(xy) + y \cos(xy)]$$

2. 对称操作,对 y 求偏拉取:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2+y^2} [2y \sin(xy) + x \cos(xy)]$$

3. 收官拼合:

$$dz = e^{x^2+y^2} [(2x \sin(xy) + y \cos(xy))dx + (2y \sin(xy) + x \cos(xy))dy]$$

近似计算与工程误差分析

PART 3



题:估算复杂数值

利用全微分计算 $\sqrt{1.02^3 + 1.97^3}$ 的近似值。

解析步解:构造函数法

1. 构造原点: 设 $f(x, y) = \sqrt{x^3 + y^3}$, 选取参考点 $(x_0, y_0) = (1, 2)$ 。
2. 确定增量: $\Delta x = 0.02, \Delta y = -0.03$ 。
3. 计算基准值: $f(1, 2) = \sqrt{1 + 8} = 3$ 。
4. 应用微分修正:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}} \Delta x + \frac{3y^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}} \Delta y$$

$$dz|_{(1,2)} = \frac{3}{6} \cdot (0.02) + \frac{12}{6} \cdot (-0.03) = 0.01 - 0.06 = -0.05$$

5. 结果汇聚: $\sqrt{1.02^3 + 1.97^3} \approx 3 - 0.05 = 2.95$ 。

工程实战: 电路电阻测定

测量 V, I , 由 $R = V/I$ 计算电阻。

- 电压误差带: $\Delta V = \pm 0.5 \text{ V}$
- 电流误差带: $\Delta I = \pm 0.3 \text{ A}$
- 质疑: 计算所得 R 的 ΔR ?

误差模型:

$$\Delta R \approx dR = \frac{1}{I}dV - \frac{V}{I^2}dI$$

此时全微分成为了评估非线性误差放大的终极武器。

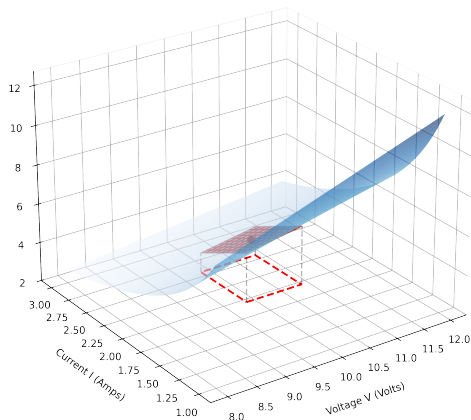


图: 误差边界在切平面上的线性投影带

方法论归纳

全微分的工程本质：系统稳定性评估器

■ 绝对误差与相对误差：

由全微分 $dR = \frac{1}{I}dV - \frac{V}{I^2}dI$ 可推算出相对误差估算式：

$$\frac{\Delta R}{R} \approx \frac{dR}{R} = \frac{1}{R} \left(\frac{1}{I}dV - \frac{V}{I^2}dI \right) = \frac{dV}{V} - \frac{dI}{I}$$

这说明测量结果的相对误差受各分量相对误差的线性累积(最坏情况下为绝对值叠加)影响。

■ 灵敏度 (Sensitivity)：

偏导数的值决定了系统对某一参数波动的“敏感程度”。

在实际电路设计中,若要压低总误差,应优先通过高精度传感器来改善那个



题:高维空间的嵌套计算

已知三元函数 $u = (x + y)^z$, 求其全微分 du 。

面对三个变量,全微分公式变为: $du = u_x dx + u_y dy + u_z dz$ 。

1. 对偏导数的“偏见”处理:

$$u_x = \frac{\partial}{\partial x}(x+y)^z = z(x+y)^{z-1}(x+y)_x = z(x+y)^{z-1}$$

$$u_y = z(x+y)^{z-1}(\text{对称性})$$

$$u_z = \frac{\partial}{\partial z}(x+y)^z \implies \text{指数函数求导} \implies (x+y)^z \ln(x+y)$$

2. 最终形态:

$$du = z(x+y)^{z-1}(dx+dy) + (x+y)^z \ln(x+y) dz$$

题:全微分综合测试

试求下列函数的全微分 du :

1. $u = e^{xyz}$

2. $u = \ln(x + y^2 + z^3)$

3. $u = x^{\frac{y}{z}}$ (选做:幂指函数的极限挑战)

解析要点 (关键算子提取):

- 题 1: 利用对称性, $du = e^{xyz}(yz dx + xz dy + xy dz)$ 。
- 题 2: 分层求偏, $du = \frac{1}{x+y^2+z^3}(dx + 2y dy + 3z^2 dz)$ 。
- 题 3: 对数求导法思想, $du = x^{\frac{y}{z}} \left[\frac{y}{xz} dx + \frac{\ln x}{z} dy - \frac{y \ln x}{z^2} dz \right]$ 。

注意: 方法论总结

多变量全微分遵循“分路求偏、线性加总”的原则。变量再多, 逻辑不变。

- **几何本质**:全微分代表了曲面上局部的切平面,是全增量 Δz 的线性主部。
- **强弱关系**:偏导连续(强) $\implies$ 可微 $\implies$ 连续(弱)。(注:可微不一定推导偏导连续)
- **计算闭环**:分别求偏导 $\rightarrow$ 贴上微分标签 $\rightarrow$ 线性叠加。
- **实战武器**:全微分是我们快速估算复杂函数、预测工程误差界限的最简工具。

下节导思:多层次系统中的变量连锁反应——复合函数求导