

9-4 复合函数求导

第九章 多元函数微分学

张振



厦门大学嘉庚学院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

- 1 链式法则的结构机理
- 2 全路径解构:算子练兵
- 3 时空系统的梯度:物理应用

链式法则的结构机理

PART 1

数学模型：

设 $z = f(u, v)$ 可微, 且 u, v 偏导存在, 则 z 对 x 的全增量由所有路径共同贡献：

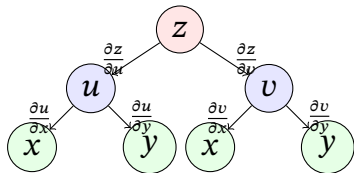
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

哲学思辨

因果链条 (Causal Chain)

底层输入波动并不会直接瞬间改变顶层结果, 它必须穿过中间变量的“过滤器”。链式法则是追踪复杂因果网格的科学指南针。

核心算法：树图演算法



口诀：分路相加，连路相乘

- 动力输入: 自变量 (x 的输入)。
- 中间齿轮组: 中间变量 (u, v)。
- 最终输出: 因变量 z 的响应。
- 导数本质: 齿轮的传动比。

工业启示

每一级传动比的级联相乘决定了终端的响应灵敏度。

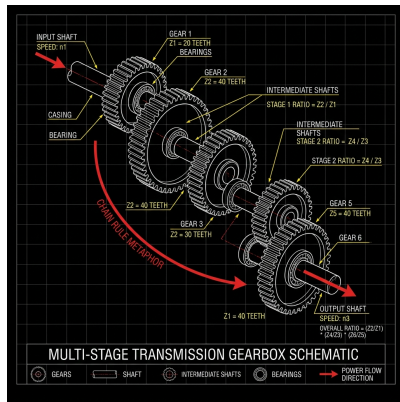


图: 齿轮级联: 链式法则机制

从全路径追踪到高阶阵地之战

PART 2



题:分路求导计算

■ 计算 $z = e^{u+v^2}$, 其中 $u = x \cos y$, $v = y \sin x$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 。

解析步解:导航法

1. 求 z 对中间层的偏导:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = e^{u+v^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = 2ve^{u+v^2}$$

2. 求中间层对 x 的响应:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = y \cos x$$

3. 合并因果路径:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= e^{u+v^2} \cdot \cos y + 2ve^{u+v^2} \cdot y \cos x \\ &= e^{x \cos y + (y \sin x)^2} [\cos y + 2y^2 \sin x \cos x] \end{aligned}$$



题:抽象与显式的博弈

设 $z = f(x^y, y \ln x)$, 其中 $f(u, v)$ 具有一阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 。

第一步:建立依存映射

$z = f(u, v)$, 其中 $u = x^y, v = y \ln x$ 。

第二步:算子展开

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1 \cdot \frac{\partial(x^y)}{\partial x} + f_2 \cdot \frac{\partial(y \ln x)}{\partial x}$$

第三步:局部求导回归

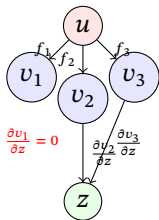
$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1 \cdot yx^{y-1} + f_2 \cdot \frac{y}{x} = \frac{y}{x} [x^y f_1 + f_2]$$

注意:此处 f_1, f_2 分别是 f 对第一个自变量和第二个自变量的偏导算子。



题:多维变量穿透

已知 $u = f(xy^2, y \cos z, e^z \sin x)$, 求 $\frac{\partial u}{\partial z}$ 。



解析步解: 依据依存树, 仅有 v_2, v_3 路径通向 z 。

$$\frac{\partial u}{\partial z} = f_2 \frac{\partial v_2}{\partial z} + f_3 \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

代入具体表达式:

$$\blacksquare v_2 = y \cos z \implies \frac{\partial v_2}{\partial z} = -y \sin z$$

$$\blacksquare v_3 = e^z \sin x \implies \frac{\partial v_3}{\partial z} = e^z \sin x$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = e^z \sin x f_3 - y \sin z f_2$$



题:高阶复合算力实战

■ 设 $z = f(x + y, xy)$ 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 。

首先,利用占位符法求得一阶导算子:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \underbrace{f_1}_A + y \underbrace{f_2}_B$$

求二阶导 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 本质上是对 A 和 B 分块再次求导:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial(f_1)}{\partial x} + y \frac{\partial(f_2)}{\partial x}$$



注意： f_1, f_2 也是自变量为 (u, v) 的复合函数。

对它们求 x 的偏导，必须再次开启链式法则的递归调用！

路径 A: 关于 f_1

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial x} &= \frac{\partial f_1}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= f_{11} \cdot 1 + f_{12} \cdot y\end{aligned}$$

路径 B: 关于 f_2

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_2}{\partial x} &= \frac{\partial f_2}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= f_{21} \cdot 1 + f_{22} \cdot y\end{aligned}$$

将 $\frac{\partial f_1}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f_2}{\partial x}$ 代入原式:

$$z_{xx} = (f_{11} + yf_{12}) + y(f_{21} + yf_{22})$$

利用二阶连续的对称性 $f_{12} = f_{21}$, 合并同类项:

$$z_{xx} = f_{11} + 2yf_{12} + y^2f_{22}$$

结构洞察

你会发现其结构与 $(a + by)^2 = a^2 + 2aby + b^2y^2$ 有异曲同工之妙。这暗示了全微分高阶形式的符号算子特征。

从气象探测到场论变换

PART 3

物理背景:

一架无人机在二维温度场 $T(x, y, t)$ 中飞行。

- 温度场随时间演变 $T(t)$ (傍晚降温)。
- 温度场本身随位置分布 $T(x, y)$ 。
- 无人机坐标受控飞行:
 $x = x(t), y = y(t)$ 。

核心质问: 无人机传感器感知到的总温度变化率
 $\frac{dT}{dt}$ 是多少?

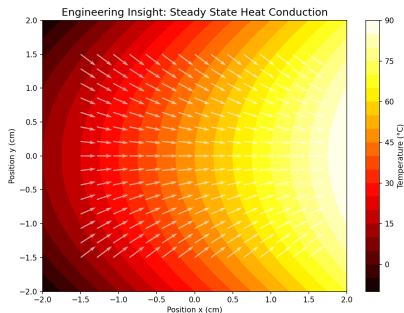


图: 动态温度场中的传感器轨迹分析

无人机感知的总变化率由“原地站桩”和“换位飞行”两部分共同构成：

$$\frac{dT}{dt} = \underbrace{\frac{\partial T}{\partial t}}_{\text{本地变化}} + \underbrace{\frac{\partial T}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{dy}{dt}}_{\text{对流带来的变化 (Convection)}}$$

这在流体力学中被称为**物质导数** (Material Derivative)。



题:极坐标梯度信息重构

若 $u = f(x, y), x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 。

证明: $\frac{\partial u}{\partial r} = u_x \cos \theta + u_y \sin \theta$ 。

依据依存树 $u \rightarrow (x, y) \rightarrow r$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \\ &= u_x \cdot (\cos \theta) + u_y \cdot (\sin \theta) = u_x \cos \theta + u_y \sin \theta\end{aligned}$$

工程视点:这就是梯度 ∇u 在径向方向的投影分量。



- **误区一：混淆 f_1, f_2 与 f_x, f_y**
 f_1 是占位符偏导(抽象位置), f_x 是最终变量偏导(链式合成)。
- **误区二：高阶求导不重画树**
一阶导完事后的每一个项都是新函数, 必须重新审视其变量依存关系。
- **误区三：路径遗失**
漏掉某条通往底层的中间路径(如三元复合中的某条支线)。

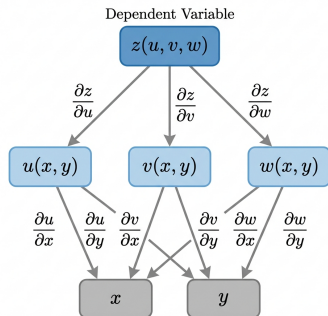
深度学习的本质:

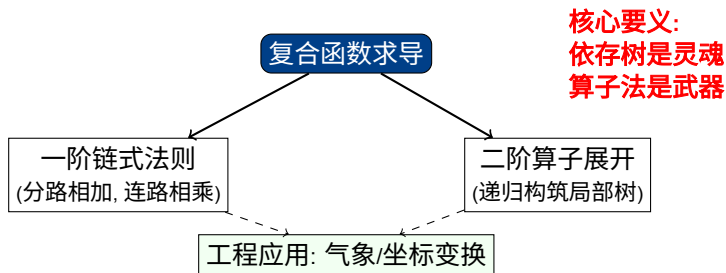
神经网络由数以万计的复合函数(神经元层)嵌套而成。

$$\text{Loss} = L(f_k(f_{k-1}(\dots f_1(\mathbf{w}) \dots)))$$

链式法则的作用:

当我们要调整参数 $\mathbf{w}$ 来减小误差时,计算机正是利用**自动微分 (Auto-Diff)** 技术,沿着链式法则的路径从后向前传递梯度。





- **万能算法:**依存树是链式法则的绝对灵魂,画对树就做对了一半。
- **高阶精髓:**处理二阶导时,必须对每个算子分支建立新的局部路径图。
- **物理映射:**复合导数是连接本地变化与传输变化的桥梁。

下节预告:秩序的隐现——隐函数求导法则