

9-5 隐函数求导

第九章 多元函数微分学

张 振



厦门大学嘉庚学院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

- 1 隐函数存在定理
- 2 直接微分法策略
- 3 高阶隐导数计算
- 4 方程组确定的隐函数

从理论到计算：单 变量与多变量情形

PART 1

设方程 $F(x, y) = 0$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的邻域内满足:

1. $F(x_0, y_0) = 0$;
2. 偏导数 F_x, F_y 连续;
3. $F_y(x_0, y_0) \neq 0$.

结论: 方程在 P_0 附近能唯一定义连续且可导的函数 $y = f(x)$, 其导数为:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

利用全微分形式不变性,对隐函数方程 $F(x, y) = 0$ 两端求微分。

- 对等式两端施加微分算子 d :

$$d[F(x, y)] = d[0]$$

- 展开全微分表达式:

$$F_x dx + F_y dy = 0$$

- 整理项:

$$F_y dy = -F_x dx \implies \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

题: 基础求导

由方程 $y^3 + x^2y - x^4 = 0$ 确定函数 $y = f(x)$, 计算其导数 $\frac{dy}{dx}$ 。

解析: 设定辅助函数 $F(x, y) = y^3 + x^2y - x^4$ 。

■ 计算偏导数:

$$F_x = 2xy - 4x^3, \quad F_y = 3y^2 + x^2$$

代入隐函数导数公式得:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy - 4x^3}{3y^2 + x^2} = \frac{4x^3 - 2xy}{3y^2 + x^2}$$

设方程 $F(x, y, z) = 0$ 。若在点 P_0 处满足 $F_z \neq 0$ 及偏导数连续条件, 则确定了函数 $z = f(x, y)$: **偏导公式**:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

解析备注: 公式的分母部分对应于因变量的偏导数; 分子部分对应于自变量的偏导数且取负值。

对三元方程 $F(x, y, z) = 0$ 两端施加微分算子 d :

■ 展开为:

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0$$

■ 求 $\partial z / \partial x$: 令 y 为常数, 则 $dy = 0$:

$$F_x dx + F_z dz = 0 \implies \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$$

■ 求 $\partial z / \partial y$: 令 x 为常数, 则 $dx = 0$:

$$F_y dy + F_z dz = 0 \implies \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

题:偏导数计算

已知隐函数 $z = e^{-xy} + e^z$, 计算其偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 。

计算过程:

- 构造辅助函数 $F(x, y, z) = z - e^z - e^{-xy} = 0$ 。
- 提取各分量偏导数:

$$F_x = ye^{-xy}, \quad F_z = 1 - e^z$$

代入公式得:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{ye^{-xy}}{1 - e^z} = \frac{ye^{-xy}}{e^z - 1}$$

题:求导运算

由方程 $x^2 + y^2 + z^2 - 9xz = 0$ 确定函数 $z(x, y)$, 计算 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 。

解析: 设定 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9xz$:

■ 对应的偏导分量: $F_x = 2x - 9z$

■ 对应的偏导分量: $F_z = 2z - 9x$

依公式可得:

$$z_x = -\frac{2x - 9z}{2z - 9x} = \frac{9z - 2x}{2z - 9x}$$

题:点位数值评估

若 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$, 计算 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(0,0)}$ 。

1. 确定对应点: 当 $x = 0, y = 0$ 时代入原方程, $e^{3z} = 1 \implies z = 0$ 。
2. 计算各分量值: 针对 $F = e^{x+2y+3z} + xyz - 1$:

$$F_x(0, 0, 0) = e^0 + 0 = 1, \quad F_z(0, 0, 0) = 3e^0 + 0 = 3$$

3. 得到结果:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(0,0)} = -1/3$$



- 约束条件 $F(x, y, z) = 0$ 定义了空间中的一张曲面。
- 条件 $F_z \neq 0$ 保证了曲面在该点处的切平面不与 z 轴平行。
- 此性质确保了曲面在变量局部平面上的投影具有唯一映射关系。

理论背景

隐函数定位了变量间的内在制约。定理不仅提供了计算工具，同时也给出了数学系统可解性的判定准则。

算子化思维：全微分计算的演化

PART 2

针对隐函数方程 $F(x, y, z) = 0$ 的微分求解, 存在以下两种逻辑:

途径 A: 偏导数合成

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

此方法依赖于分式化简, 计算步骤较多且易产生符号错误。

途径 B: 直接微分法

$$dF = F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0$$

此方法利用全微分算子的线性性质, 具备高度的计算简洁性。

核心思想:利用全微分的形式不变性,将方程 $F(x, y, z) = 0$ 两端看作对微分算子 d “透明”的整体。

算子三步走

1. **算子作用:**对等式两端直接施加 d , 即 $d[F(x, y, z)] = d[0]$ 。
2. **线性展开:**利用微分运算法则(和、积、复合)展开,将隐函数 z 的微分 dz 视为未知量。
3. **代数提取:**从方程中整理合并 dz 项,直接解得全微分或偏导数。

题: 全微分求解

已知方程 $\cos z + 3x^2 - 2y^2 - e^{2z} = 0$, 计算其确定的全微分 dz 。

解析 (微分算子法): 对等式两端施加微分算子 d :

$$d(\cos z) + d(3x^2) - d(2y^2) - d(e^{2z}) = d(0)$$

展开为:

$$-\sin z dz + 6x dx - 4y dy - 2e^{2z} dz = 0$$

整理项:

$$-(\sin z + 2e^{2z})dz = -6x dx + 4y dy \implies dz = \frac{6x dx - 4y dy}{\sin z + 2e^{2z}}$$

题: 偏导数求解

已知 $z - y - x + xe^{z-y-x} = 0$, 计算 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 。

利用微分算子法: $d(z - y - x) + d(x \cdot e^{z-y-x}) = 0$

$$(dz - dy - dx) + e^{z-y-x}dx + xe^{z-y-x}(dz - dy - dx) = 0$$

$$(1 + xe^{z-y-x})(dz - dy - dx) = -e^{z-y-x}dx$$

由此得:

$$dz - dy - dx = \cdots \implies z_y = 1$$

从一阶到高阶：常 规方法与算子进阶

PART 3

对于由 $F(x, y, z) = 0$ 确定的函数 $z(x, y)$, 已知一阶导数为:

$$z_x = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}$$

求二阶导数 z_{xx} 时, 可直接对上式关于 x 求偏导:

$$z_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{F_x}{F_z} \right) = -\frac{\left[\frac{\partial F_x}{\partial x} \right] F_z - F_x \left[\frac{\partial F_z}{\partial x} \right]}{F_z^2}$$

注意:核心点:复合求导

注意 F_x 和 F_z 是 x, y, z 的函数, 其中 $z = z(x, y)$ 。因此:

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} = F_{xx} + F_{xz} \cdot z_x, \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = F_{zx} + F_{zz} \cdot z_x$$



■ 题:球面方程

已知 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, 计算 z_{xx} 。

步骤 1:一阶导数

设定 $F = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$, 得 $F_x = 2x, F_z = 2z \implies z_x = -x/z$ 。步骤 2:对一阶导再次关于 x 求导

$$z_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{z} \right) = -\frac{1 \cdot z - x \cdot z_x}{z^2}$$

步骤 3:代入 z_x 并化简

$$z_{xx} = -\frac{z - x(-x/z)}{z^2} = -\frac{z^2 + x^2}{z^3} = -\frac{R^2 - y^2}{z^3}$$

当方程复杂时,常规法容易出错。此时可对一阶全微分方程 $dF = 0$ 再次求导。**逻辑演示:**对于 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, 一阶微分: $xdx + ydy + zdz = 0$ 。对上式再次施加 d 算子(注意 $d^2x = 0, d^2y = 0$):

$$d(x)dx + x(0) + d(y)dy + y(0) + d(z)dz + zd^2z = 0$$

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 + zd^2z = 0$$

解出二阶全微分结果:

$$d^2z = -\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z}$$

通过提取 dx^2 的系数即可得到 z_{xx} 。

多变量映射：雅可比行列式及其公式

PART 4

设方程组 $\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$ 。目标: 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 。

- 全微分作用: 对两个方程分别施加微分算子 d :

$$\begin{cases} F_x dx + F_y dy + F_u du + F_v dv = 0 \\ G_x dx + G_y dy + G_u du + G_v dv = 0 \end{cases}$$

- 锁定响应方向: 求关于 x 的偏导时, 固定 y 为常数, 则 $dy = 0$ 。
- 整理线性方程组 (以 du, dv 为未知量):

$$\begin{cases} F_u du + F_v dv = -F_x dx \\ G_u du + G_v dv = -G_x dx \end{cases}$$

1. 代数消元(目标:求 du , 通过消去 dv 来建立关系):

$$\begin{cases} \text{式 } 1 \times G_v : & F_u G_v du + F_v G_v dv = -F_x G_v dx \\ \text{式 } 2 \times F_v : & G_u F_v du + G_v F_v dv = -G_x F_v dx \end{cases}$$

两式相减得: $(F_u G_v - G_u F_v) du = -(F_x G_v - G_x F_v) dx$ 2. 发现“列替换”结构:

- 分母: 对应因变量 u, v 的交叉系数组合。
- 分子: 结构与分母完全一致, 但原先 u 的位置被 x 的项替换了。

直觉口诀: 求谁的偏导, 就把分母行列式中对应因变量的那一列换掉!

求解线性方程组得到 du (此处使用行列式作为消元结果的简记工具):

$$du = \frac{\begin{vmatrix} -F_x dx & F_v \\ -G_x dx & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = \frac{-\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix} dx}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

结果提取: 两端除以 dx , 并引入雅可比行列式记号 $J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)}$$

避坑指南: 若未学过行列式, 只需记住二阶展开: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ 。这本质上是解方程组消元后的系数组合, 引入雅可比记号 J 是为了方便

题: 求 u_x

■ 设方程组 $\begin{cases} u + v = x + y \\ xu + yv = 1 \end{cases}$ 确定了 $u, v(x, y)$ 。

1. 计算系统行列式: $J = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{vmatrix} = y - x。$

2. 确定分子项: $D_u = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ u & y \end{vmatrix} = -y - u。$

3. 最终结果: $u_x = -D_u/J = \frac{y+u}{y-x}。$



- **核心公式:** $-F_x/F_z$ (隐导数的第一判定律)。
- **算子应用:** 两端全微分方法 (高效计算的核心路径)。
- **雅可比公式:** 方程组情形下的标准化处理。

谢谢

下节预告:多元函数极值(拉格朗日乘数法)