

9-6 多元函数的极值与最值

第九章 多元函数微分学

张 振



厦门大学嘉庚学院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

- 1 多元函数极值及其判定
- 2 条件极值与拉格朗日乘数法
- 3 最值问题与综合应用

无条件极值：定义、必要性与充分性

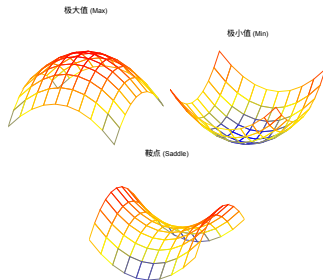
PART 1

设函数 $f(P)$ 在点 P_0 的某个邻域内有定义。

- **极大值**: 对于该邻域内任意 $P \neq P_0$, 都有 $f(P) < f(P_0)$ 。
- **极小值**: 对于该邻域内任意 $P \neq P_0$, 都有 $f(P) > f(P_0)$ 。

注意: 驻点与极值

取得极值点处 (若可导), 必有 $f_x = 0, f_y = 0$ 。
但这只是 **必要条件**。



设驻点为 (x_0, y_0) , 记 $A = f_{xx}, B = f_{xy}, C = f_{yy}$, 令 $\Delta = AC - B^2$:

1. 若 $\Delta > 0$: 必有极值。
 - 当 $A < 0$ 时, 为极大值; 当 $A > 0$ 时, 为极小值。
2. 若 $\Delta < 0$: 无极值 (鞍点)。
3. 若 $\Delta = 0$: 无法判断。

在驻点处, 函数的“局部形状”由谁决定? 我们可以类比一元函数:

- **一元回归:** 若 $f'(x_0) = 0$, 则函数在 x_0 附近像一个抛物线:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 \quad (\text{增量由二阶导主导})$$

- **二元延伸:** 驻点处 $f_x = 0, f_y = 0$, 一阶线性变化消失。

$$\Delta f \approx \frac{1}{2}[f_{xx}h^2 + 2f_{xy}hk + f_{yy}k^2]$$

注意: 核心逻辑

驻点处的一阶导项全为 0, 因此函数在驻点附近的“凹凸性”完全由二阶偏导项的组合决定。

通过 **配方法**, 我们可以看透二次项合力的逻辑 (设 $A \neq 0$):

$$\Delta f \approx \frac{1}{2} \underbrace{\left[A \left(h + \frac{B}{A}k \right)^2 + \frac{AC - B^2}{A} k^2 \right]}_{\text{两部分构成的合力}}$$

1. 当 $AC - B^2 > 0$ 时: 前后两项的系数符号相同 (都由 A 决定)。这意味着无论朝哪个方向移动, 函数值的增量 Δf **符号恒定** $\implies$ 形成极值盆地/山峰。
2. 当 $AC - B^2 < 0$ 时: 两项系数符号相反。朝某些方向走增量为正, 某些方向走为负 $\implies$ 形成 **鞍点** (类似马鞍, 前后翘、左右垂)。

当 $\Delta = 0$ 时, 配方后的第二项消失了:

$$\Delta f \approx \frac{1}{2}A\left(h + \frac{B}{A}k\right)^2 + 0 \cdot k^2$$

这会带来严重的 **信息缺失**:

- 在直线 $h = -\frac{B}{A}k$ 上, 所有的二阶导项贡献之和恰好为 0。
- 此时, 决定该方向升降的权力交给了更细微的 **三阶、四阶导数**。

注意: 结论

仅凭二阶导数提供的信息, 不足以看清函数在所有方向上的全貌, 因此必须说“无法判断”。



题:极值计算

计算 $f(x, y) = (6x - x^2)(4y - y^2)$ 的极值。

解题步骤:

1. 找驻点:

$$f_x = (6 - 2x)(4y - y^2) = 0, \quad f_y = (6x - x^2)(4 - 2y) = 0$$

解得驻点为 $(3, 2)$ 。

2. 计算判别式: 在 $(3, 2)$ 处,

$$f_{xx} = -2(4y - y^2) = -8, \quad f_{yy} = -2(6x - x^2) = -18, \quad f_{xy} = 0。 \text{ 即} \\ A = -8, \quad B = 0, \quad C = -18。$$

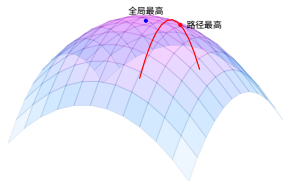
3. 结论: $\Delta = AC - B^2 = 144 > 0$, 且 $A < 0 \implies$ 该点为极大值点。代入得 **极大值** $f(3, 2) = 36$ 。

受约束情形下的最优化

PART 2

1. 寻找目标的不同

- **无条件极值**:在平原上寻找“最高峰”。
- **条件极值**:限制在一条“指定的山路”上,寻找该路径上的“最高点”。



红色线条为约束路径 $\varphi(x, y) = 0$

2. 求解逻辑的转变

- **消元法**(暴力法):将约束方程变形带入。
困难:方程往往难以反解。
- **拉格朗日法**(协同法):不破坏方程结构,让目标与约束“对齐”。

注意:核心思想

与其费力消去变量,不如引入 λ 让所有变量地位平等,在同一个平衡方程组中解决。

在条件极值点处,目标函数 $f(x, y)$ 与约束曲线 $\varphi(x, y) = 0$ 必然相切。

- **全微分视角:** $df = f_x dx + f_y dy = 0$ 且 $d\varphi = \varphi_x dx + \varphi_y dy = 0$ 。
- **梯度视角:**这意味着向量 (f_x, f_y) 与 (φ_x, φ_y) 必须平行:

$$f_x + \lambda \varphi_x = 0, \quad f_y + \lambda \varphi_y = 0$$

构造辅助函数: $L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda \varphi(x, y, z)$ 。

计算流程

1. **建立方程组:** $L_x = 0, L_y = 0, L_z = 0$ 及约束方程 $\varphi = 0$ 。
2. **求解参数:** 通常先用 λ 表示变量, 再代入约束方程。
3. **判定最值:** 根据物理背景或边界值确定最大/最小值。



题: 约束计算

求 $u = x - 2y + 2z$ 在 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 下的最值。

构造 $L(x, y, z, \lambda) = x - 2y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$:

■ 求导: $L_x = 1 + 2\lambda x = 0$, $L_y = -2 + 2\lambda y = 0$, $L_z = 2 + 2\lambda z = 0$ 。

■ 表示变量: $x = -1/2\lambda$, $y = 1/\lambda$, $z = -1/\lambda$ 。

■ 代入约束:

$$\left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\lambda}\right)^2 = 1 \implies \frac{1/4 + 1 + 1}{\lambda^2} = 1 \implies \lambda^2 = \frac{9}{4}$$

■ 得到 $\lambda = \pm 3/2$ 。

代入 x, y, z 计算 u , 最终得: $u_{\max} = 3, u_{\min} = -3$ 。

从数学模型到实际决策

PART 3



■ 题:多约束优化

将 2 米长铁丝分为圆、正方形、正三角形,求总面积最小时各段长度。

1. 建立数学模型: 设圆、正方形、正三角形的周长分别为 x, y, z , 则总面积为:

$$S = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{y^2}{16} + \frac{\sqrt{3}z^2}{36}$$

约束条件为: $x + y + z = 2$ 。2. 构造拉格朗日函数:

$$L(x, y, z, \lambda) = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{y^2}{16} + \frac{\sqrt{3}z^2}{36} + \lambda(x + y + z - 2)$$

3. 求导并建立方程组:

$$\begin{cases} L_x = \frac{x}{2\pi} + \lambda = 0 \implies x = -2\pi\lambda \\ L_y = \frac{y}{8} + \lambda = 0 \implies y = -8\lambda \\ L_z = \frac{\sqrt{3}z}{18} + \lambda = 0 \implies z = -6\sqrt{3}\lambda \end{cases}$$

4. 代入约束求解: 将 x, y, z 代入 $x + y + z = 2$, 解得 $\lambda = \frac{-2}{2\pi+8+6\sqrt{3}}$ 。**注意:结果解读**

当总面积最小时,各段长度之比为 $2\pi : 8 : 6\sqrt{3}$ 。这意味着各图形的内切圆直径应该相等(一种几何上的平衡)。

■ 题:消费决策

效用 $U = x^{1/2}y$, 预算 $x + 4y = 48$, 求最优消费组合。

■ 什么是“效用”(Utility)?

在经济学中,效用表示消费者从商品组合中获得的心理满足程度。

■ 问题本质:在金钱有限(预算约束)的情况下,如何买东西才能最开心?

1. 构造拉格朗日函数:

$$L(x, y, \lambda) = x^{1/2}y + \lambda(x + 4y - 48)$$

2. 求偏导并令其为 0:

$$\begin{cases} L_x = \frac{y}{2\sqrt{x}} + \lambda = 0 \implies \lambda = -\frac{y}{2\sqrt{x}} \\ L_y = \sqrt{x} + 4\lambda = 0 \implies \lambda = -\frac{\sqrt{x}}{4} \end{cases}$$

3. 联立消去 λ :

$$\frac{y}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{4} \implies 4y = 2x \implies x = 2y$$

4. 代入预算约束:

$$2y + 4y = 48 \implies 6y = 48 \implies y = 8, x = 16$$

结论:投入 16 单位 x 和 8 单位 y 可获得最大满足感。

- 无条件极值: 由 $f_x = f_y = 0$ 定驻点, 由 $AC - B^2$ 定性质。
- 条件极值: 由拉格朗日函数 $L = f + \lambda\varphi$ 将约束转化为无约束求解。

谢谢

下次课预告:第十章重积分