

第九章多元函数微分学专题复习 (学生版)

MatNoble

2026 年 6 月 11 日

目录

复习导引	3
1 考点一:求二元函数的定义域	4
知识点汇总	4
经典例题讲解	4
例题变式	4
2 考点二:求二元函数的极限	5
知识点汇总	5
经典例题讲解	5
例题变式	6
3 考点三:求偏导数	7
知识点汇总	7
经典例题讲解	7
例题变式	8
4 考点四:连续、偏导数与可微的关系	9
知识点汇总	9
经典例题讲解	9
例题变式	10

5 考点五:全微分	11
知识点汇总	11
经典例题讲解	11
例题变式	11
6 考点六:复合函数的偏导数	12
知识点汇总	12
经典例题讲解	12
例题变式	13
7 考点七:隐函数求偏导数	14
知识点汇总	14
经典例题讲解	14
例题变式	15
8 考点八:多元函数的极值	16
知识点汇总	16
经典例题讲解	16
例题变式	17

【免责声明】本讲义仅适用于大一学生的期末考试复习,未覆盖高等数学的所有知识点。

复习导引

本讲义涵盖第九章多元函数微分学的八类期末高频考点：

1. 二元函数的定义域；
2. 二元函数的极限；
3. 偏导数；
4. 连续、偏导数与可微的关系；
5. 全微分；
6. 复合函数的偏导数；
7. 隐函数求偏导数；
8. 多元函数的极值。

1 考点一:求二元函数的定义域

知识点汇总

1. 二元函数定义域是使表达式有意义的所有点 (x, y) 的集合。

2. 常见限制:

形式	限制
$\sqrt{g(x, y)}$	$g(x, y) \geq 0$
$\ln g(x, y)$	$g(x, y) > 0$
$\frac{1}{g(x, y)}$	$g(x, y) \neq 0$
$\arcsin g(x, y), \arccos g(x, y)$	$-1 \leq g(x, y) \leq 1$

3. 多个限制同时出现时,定义域取交集。集合表示需明确边界的包含情况。

4. 几何描述通常采用圆盘、圆外、半平面、带状区域及其交集。

经典例题讲解

1. 设

$$f(x, y) = \ln \sqrt{4 - x^2 - y^2},$$

则 $f(x, y)$ 的定义域用集合表示为 _____。

例题变式

1. 求函数

$$z = \frac{\sqrt{x+y}}{\ln(1-x^2-y^2)}$$

的定义域。

2 考点二:求二元函数的极限

知识点汇总

1. 若函数在趋近点附近由初等函数复合而成且分母不为 0,可直接代入。
2. 若得到 $0/0$ 型,使用等价无穷小替换:

$$\ln(1+u) \sim u, \quad \sin u \sim u, \quad e^u - 1 \sim u \quad (u \rightarrow 0).$$

3. 极限不存在的证明通常采用路径法。若沿两条路径得到不同极限,则二元极限不存在。
4. 极限为 0 的证明通常采用夹逼定理:

$$\left| \frac{x^m y^n}{x^2 + y^2} \right|$$

可结合 $x^2 \leq x^2 + y^2$, $y^2 \leq x^2 + y^2$ 放缩。

5. 含 $x^2 + y^2$ 的原点极限,或令

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r \rightarrow 0^+.$$

经典例题讲解

1. 计算

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x}{\sqrt{1-xy} - 1}.$$

2. 计算

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(1+xy)}{y}.$$

例题变式

1. 判断极限

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

是否存在。

3 考点三:求偏导数

知识点汇总

1. 求 f_x 时,把 y 看作常数;求 f_y 时,把 x 看作常数。
2. 在具体点处求偏导数,若表达式较复杂,可先求一般偏导再代点;若点在分段边界上,常需用定义。

3. 偏导数定义:

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$
$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

4. 高阶偏导需考虑求导顺序。若二阶偏导在点附近连续,则

$$f_{xy} = f_{yx}.$$

经典例题讲解

1. 设

$$z = x^2y - x^3y^2 + (x+1)e^{-2xy},$$

求

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(-1,0)}, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(-1,0)}.$$

例题变式

1. 设

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

求 $f_x(0, 0), f_y(0, 0)$ 。

4 考点四:连续、偏导数与可微的关系

知识点汇总

1. 二元函数在点处可微,则函数在该点连续,且两个偏导数存在。
2. 两个偏导数存在,不一定连续,也不一定可微。
3. 函数连续,不一定偏导数存在。
4. 若 f_x, f_y 在点的某邻域内存在,并且在该点连续,则 f 在该点可微。
5. 常见的推导关系:

$$f_x, f_y \text{ 连续} \implies f \text{ 可微} \implies f \text{ 连续},$$

$$f \text{ 可微} \implies f_x, f_y \text{ 存在}.$$

经典例题讲解

1. 设二元函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处()。

(A) 连续,且偏导数存在

(B) 不连续,但偏导数存在

(C) 连续,但偏导数不存在

(D) 不连续,且偏导数不存在

2. 考虑函数 $f(x, y)$ 的下列条件性质:

- (1) $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 连续, (2) $f_x(x, y), f_y(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 连续,
(3) $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 可微, (4) $f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)$ 存在.

用 $P \Rightarrow Q$ 表示可由性质 P 推出性质 Q , 则正确的是()。

(A) $(3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1)$

(B) $(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$

(C) $(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$

(D) $(3) \Rightarrow (1) \Rightarrow (4)$

例题变式

1. 判断命题“若 $f_x(0, 0), f_y(0, 0)$ 存在, 则 f 在 $(0, 0)$ 连续”是否正确。

5 考点五:全微分

知识点汇总

1. 若 $z = f(x, y)$ 可微, 则

$$dz = f_x(x, y) dx + f_y(x, y) dy.$$

2. 在点 (x_0, y_0) 处:

$$dz|_{(x_0, y_0)} = f_x(x_0, y_0) dx + f_y(x_0, y_0) dy.$$

3. 全微分可用于近似计算:

$$\Delta z \approx dz = f_x \Delta x + f_y \Delta y.$$

经典例题讲解

1. 函数

$$z = x^2 + y^2 + 3xy - 2x$$

在 $(1, 0)$ 点处的全微分为

$$dz = \underline{\hspace{2cm}}.$$

例题变式

1. 求 $z = e^{xy} + x^2y$ 在点 $(0, 1)$ 处的全微分。

6 考点六:复合函数的偏导数

知识点汇总

1. 若 $z = f(u, v), u = u(x, y), v = v(x, y)$, 则

$$z_x = f_u u_x + f_v v_x, \quad z_y = f_u u_y + f_v v_y.$$

2. 若 $z = f(x, u), u = u(x, y), x$ 可能同时作为外层自变量和内层变量:

$$z_x = f_1 + f_2 u_x, \quad z_y = f_2 u_y.$$

这里 f_1 表示 f 对第一个变量求偏导, f_2 表示对第二个变量求偏导。

3. 也可用全微分法:先写

$$dz = f_1 du + f_2 dv,$$

再把 du, dv 展开为 dx, dy 的线性组合,最后比较 dx, dy 的系数。

经典例题讲解

1. 设

$$z = f\left(x, \frac{x}{y}\right),$$

其中 f 具有一阶连续偏导数,求

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}.$$

例题变式

1. 设

$$z = f(xy, x + y),$$

其中 f 具有一阶连续偏导数, 求 z_x, z_y 。

7 考点七:隐函数求偏导数

知识点汇总

1. 若方程

$$F(x, y, z) = 0$$

确定隐函数 $z = z(x, y)$, 且 $F_z \neq 0$, 则

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z}, \quad z_y = -\frac{F_y}{F_z}.$$

2. 直接微分法:

$$dF = F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0.$$

通过整理出 dz 的表达式, 再比较 dx, dy 的系数。

3. 若题目给出具体点, 应先由方程求出该点对应的 z , 再代入公式或全微分结果。

经典例题讲解

1. 设方程

$$\ln(x^2 + y^2) + e^z = 3xyz$$

确定了隐函数 $z = f(x, y)$, 求

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}.$$

例题变式

1. 若

$$x^2 + y^2 + z^2 = xyz$$

确定 $z = z(x, y)$, 求 z_x, z_y 。

8 考点八:多元函数的极值

知识点汇总

1. 无约束极值的必要条件:若 f 在点 (x_0, y_0) 处取得极值,且偏导数存在,则

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

2. 二阶判别法:设

$$A = f_{xx}(x_0, y_0), \quad B = f_{xy}(x_0, y_0), \quad C = f_{yy}(x_0, y_0),$$

$$\Delta = AC - B^2.$$

若 $\Delta > 0, A > 0$, 则为极小值;若 $\Delta > 0, A < 0$, 则为极大值;若 $\Delta < 0$, 则不是极值;若 $\Delta = 0$, 需另判。

3. 有约束极值可用代入法或拉格朗日乘数法。
4. 闭区域上的最大最小值,要同时检查内部驻点和边界。

经典例题讲解

1. 函数

$$f(x, y) = x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2 + 1$$

的极值点是()。

- (A) (2, 0) (B) (2, 2) (C) (0, 0) (D) (0, 2)

2. 求

$$f(x, y) = 4 - x - y$$

在圆

$$x^2 + y^2 = 1$$

上的极值。

3. 设某消费者的效用函数为

$$U(x, y) = x^{\frac{1}{2}}y,$$

其中 x 是甲商品数量, y 是乙商品数量。若单价 $P_x = 1, P_y = 4$, 可支配收入为 48, 求 x, y 分别为多少时效用最大。

例题变式

1. 求函数

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y$$

的极值。