

1-1 命题符号化及联结词

第一章：命题逻辑



厦门大学嘉庚学院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

- 1 课程导引：离散世界与逻辑之门
- 2 命题的定义与真假判定
- 3 命题符号化与复合命题
- 4 五大基本逻辑联结词
- 5 自然语言符号化技巧与实战
- 6 本节小结与知识图谱

离散世界与逻辑之门

PART 1

认知世界的两种数学视角:

- **连续世界(微积分 / 高数):**
时间流逝、水银柱高度、行驶速度等平滑连续变化量。以**极限与导数**为研究工具。
- **离散世界(离散数学):**
分离、不连续、分立可数的研究对象。
 - **时钟度量:** 时间虽连续, 但**时钟是离散系统**——数字钟按秒跳变(无中间态), 按模 12 循环(模运算)。
 - **生活常态:** 台阶级数、硬币枚数、交通灯状态。

思考: 数字计算的底层哲学

现代数字计算机在物理底层是**离散状态机**。

- 硅基晶体管中, 只有明确的高电平导通 (1) 与低电平截止 (0);
- 计算机内存通过**离散地址**定位;
- 一切复杂的大模型与核心算法, 底层均建立在离散状态跳变之上!

在后续学习中, 现实世界的各种离散结构将被抽象为严谨的数学模型:

第 1-2 章:数理逻辑

核心离散对象:

命题真假值 $\{T, F\}/\{1, 0\}$

工程与现实映射:

- 硬件逻辑门电路
- 代码分支
(if-else)
- 知识图谱与自动推理

第 4 章:集合与关系

核心离散对象:

离散二元关系与偏序

工程与现实映射:

- 社交平台好友/关注网
- 编译与选课前序依赖
- 关系数据库模型
(SQL)

第 5-6 章:图论

核心离散对象:

顶点集 V 与边集 E 拓扑

工程与现实映射:

- 地图导航最短路径
- 互联网路由器拓扑
- 考场排考与冲突着色

离散数学核心板块

1. **数理逻辑**(本篇):形式推理与机器思维
2. **集合与关系**:数据建模与关系代数
3. **图论**:网络拓扑与复杂网络算法

数理逻辑 (形式基石)

命题演算 $\rightarrow$ 一阶谓词演算

↓
底层支撑与赋能

人工智能 (核心赋能)

知识表示 / 自动
推理 / 知识图谱

题: 逻辑谜题: 身份识别

神秘岛屿上住着两类人:

- 骑士 (Knight): 永远说真话。
- 无赖 (Knave): 永远说假话。

A 说: “我们两个都是无赖。”

求证: A 与 B 的真实身份。

注意: 直觉思维的局限

- 若 A 为骑士 $\implies$ 话为真
 $\implies$ A 是无赖 (矛盾!);
- 若 A 为无赖 $\implies$ 话为假
 $\implies$ 两人不全为无赖...

自然语言易陷入死循环, 必须借助**严格符号化逻辑**!

分步推演:

1. 设 A 为骑士:说真话 $\implies$ 两人均无赖 $\implies A$ 无赖(矛盾!), 故 A 为无赖。
2. 否定之否定: A 话为假 $\implies$ “至少有一位骑士”。
3. 锁定身份: 已知 A 是无赖, 故 B 必为骑士!

最终判定

A 是无赖, B 是骑士。

思考:逻辑的核心价值

将日常思维推演转化为机械严密的符号代数, 彻底消除自然语言的歧义。

命题的概念、真值与边界

PART 2

定义 1-1.1: 命题 (Proposition)

能判断**真假**的**陈述句**称为命题。

命题判定的两大必要准则(缺一不可):

1. **准则一(句型结构):**
必须是**陈述句**。疑问句、祈使句、感叹句均非命题!
2. **准则二(真假明确):**
必须具有客观、唯一确定的真假值(True 或 False), 不可模棱两可。

思考: 形式判定的直观筛选法

- **第一道门槛(语法层):**
是否在陈述客观事实或命题断言?
→ “请关门!”(祈使句 ×)
→ “明天会下雨吗?”(疑问句 ×)
- **第二道门槛(语义层):**
其陈述是否具备客观确定真假?
→ “ $x + 1 = 2$ ”(含自由变量, 未定 ×)
→ “今天好冷啊”(主观感受, 非客观 ×)

真值 (Truth Value) 的严格定义

命题的判断结果称为它的**真值**。

二值逻辑的真值表示：

- 符合客观事实：真值为**真**，记为 **T** 或 **1**。
- 不符合客观事实：真值为**假**，记为 **F** 或 **0**。

思考：客观存在性认知

真值是命题固有的客观属性，**不依赖于当前技术能否证实**（如“太阳系外存在生命”真值唯一确定，是命题）。

注意：悖论不是命题

典型代表：说谎者悖论 (Liar Paradox)

“我正在说的这句话是假话。”

- 若假设此话为**真**：依其陈述，此话应为假（矛盾！）；
- 若假设此话为**假**：则“正在说假话”为假，即此话为真（又矛盾！）。

结论：引发逻辑死循环与震荡，**无法赋予唯一确定的真值**，故不是命题！

题:判断下列语句是否为命题? 若为命题,指出其真值

- 1. 北京是中华人民共和国的首都。
- 2. $2 + 3 = 8$ 。
- 3. 请把门关上!
- 4. $x + 5 > 0$ 。
- 5. 明天会下雨吗?
- 6. 太阳系有且仅有一颗恒星。

序号	语句内容	判定	真值 / 理由
(1)	北京是首都	✓	T (客观事实)
(2)	$2 + 3 = 8$	✓	F (假命题亦命题!)
(3)	请把门关上!	✗	祈使句(无真假)
(4)	$x + 5 > 0$	✗	含变元 x (谓词)
(5)	明天下雨吗?	✗	疑问句(无真假)
(6)	太阳系单恒星	✓	T (科学事实)

注意:避坑双法则

- 假 $\neq$ 非命题:
真值为假的陈述句依然是严格命题!
- 未知 $\neq$ 无真值:
“外星有智慧生命”真值客观唯一存在(非 T 即 F), 故是命题!

命题符号化与原子/复合结构

PART 3

原子命题 (简单命题)

不能再分解为更简单命题的命题。
通常用小写英文字母表示: $p, q, r, s, \dots$

示例:

- p : 雪是白色的。
- q : 小明是一名大学生。

复合命题 (Compound Proposition)

由原子命题通过**逻辑联结词**组合而成的更复杂的命题。

示例:

- “如果天下雨, 那么地面就湿。”
- “小明不仅聪明, 而且勤奋。”

思考: 形式化翻译

命题符号化就是将自然语言剥去辞藻修饰, 提炼为由原子变元与逻辑算子构成的数学表达式。

五大基本逻辑联结 词的语义与规则

PART 4

定义: 设 p 为命题, 复合命题“非 p ”称为 p 的否定, 记作 $\neg p$ 。

真值规则:

- 当 $p = \text{T}$ 时, $\neg p = \text{F}$ 。
- 当 $p = \text{F}$ 时, $\neg p = \text{T}$ 。

p	$\neg p$
0	1
1	0

自然语言对应映射

“不……”、“没有……”、“并非……”、“非……”

注意: 常见陷阱: 否定的范围

设 p : “所有学生都及格了”

- **正确** $\neg p$: 并非都及格 (即存在不及格)
- **错误认知**: 所有学生都不及格 (过度否定 $\times$)

定义:两个命题 p 和 q 的复合命题“ p 并且 q ”称为合取, 记作 $p \wedge q$ 。

真值规则 (全真才真):当且仅当 p 与 q 同时为真时, $p \wedge q$ 为真; 否则为假。

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

自然语言丰富表达:在自然语言中, 很多表示转折、并列、递进的关联词, 在逻辑上均属于合取 $\wedge$:

- “并且”、“且”、“和”
- “虽然.....但是.....”
- “不仅.....而且.....”
- “一面.....一面.....”

题:即时练习

“小张虽然身体弱, 但是学习成绩优秀。”

设 p : 小张身体弱; q : 小张学习成绩优秀。

符号化为: $p \wedge q$ 。

定义:两个命题 p 和 q 的复合命题“ p 或 q ”称为析取, 记作 $p \vee q$ 。

真值规则 (一真即真):只要 p 与 q 中至少有一个为真, $p \vee q$ 即为真; 全假才为假。

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

相容或 vs 排他或

- **相容或 ($\vee$):**允许二者兼得。例如:“本课程欢迎计算机专业或智能专业的学生”。
- **排他或 ($\oplus$ / **XOR**):**二者有且仅有一个成立。例如:“小明正在北京或在上海”。

注意:默认约定

数理逻辑标准基本联结词 $\vee$ 严格代表**相容或**。若表达排他或, 需用 $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$ 。

定义: 命题“如果 p , 则 q ”称为蕴涵式, 记作 $p \rightarrow q$ 。

- p 称为前件 (Antecedent)
- q 称为后件 (Consequent)

真值规则 (善意推定): 只有当 $p = \text{T}$ 且 $q = \text{F}$ 时, $p \rightarrow q$ 为 **F**; 其余情况均为 **T**。

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

思考: 契约视角: 善意推定模型

契约: “若考 100 分 (p), 则奖电脑 (q)”

p (满分)	q (奖电脑)	$p \rightarrow q$	契约状态解读
1	1	T	兑现承诺 (履约)
1	0	F	唯一违约 (前真后假)
0	1	T	额外奖励 (未违约)
0	0	T	前提未达 (算作履约)

注意: 虚真法则 (Vacuous Truth)

前件为假 ($p = 0$), 蕴涵式必为真!

定义:命题“ p 当且仅当 q ”称为等价式,
记作 $p \leftrightarrow q$ 。

真值规则 (同真同假才为真):当且仅当 p
与 q **真值相同** (同为 1 或同为 0) 时,
 $p \leftrightarrow q$ 为真;真值不同时为假。

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

等价的内在结构:

- $p \leftrightarrow q$ 逻辑上等价于两个蕴涵方向的合取:

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

- 表示 p 与 q 互为充分必要条件。

常见自然语言句式:

- “ p 当且仅当 q ” (if and only if / iff)
- “ p 是 q 的充要条件”
- “如果 p 则 q , 且如果 q 则 p ”

自然语言符号化的逻辑解构

PART 5

在自然语言中, 前件与后件的表述方式极易混淆, 请熟记下表:

自然语言句型	符号化形式	逻辑主旨说明
如果 p , 那么 q	$p \rightarrow q$	p 是充分条件
只要 p , 就 q	$p \rightarrow q$	p 是充分条件
因为 p , 所以 q	$p \rightarrow q$	p 引出 q
只有 p , 才 q	$q \rightarrow p$	p 是必要条件 (p 在后件!)
除非 p , 否则不 q	$q \rightarrow p$	等价于“只有 p 才 q ”
除非 p , 否则 q	$\neg p \rightarrow q$	若无 p , 则必然 q (即 $p \vee q$)
p 是 q 的充分条件	$p \rightarrow q$	前推后
p 是 q 的必要条件	$q \rightarrow p$	后推前

题: 命题符号化大实战

设原子命题变项:

- p : 今天气温低于 0°C ; q : 今天下大雪;
- r : 学校停课; s : 我们按原计划举行离散数学期末考试。

请将下述陈述符号化:

“如果今天气温低于 0°C 且下大雪, 那么除非学校停课, 否则我们将按原计划举行离散数学期末考试。”

结构分层剥离:

1. 抓取主干:全句是“如果.....那么.....”的大蕴涵结构:

前件 $\rightarrow$ 后件

2. 前件符号化:“今天气温低于 0°C 且下大雪”:

前件 $= p \wedge q$

3. 后件符号化:“除非学校停课 (r), 否则原计划考试 (s)”:

后件 $= \neg r \rightarrow s$ (亦可写为 $r \vee s$)

4. 合成最终公式:

$$(p \wedge q) \rightarrow (\neg r \rightarrow s)$$

思考:解题心法:剥洋葱三步法

1. **第一步(设元)**:将不可再分的原子陈述定义为命题变项。
2. **第二步(找主干)**:识别最高层级的主联结词(划分左右结构)。
3. **第三步(入微)**:由外向内逐层翻译子句,并用括号明确优先级。

本节小结与知识图谱

PART 6

基础概念梳理

- **命题判别**: 陈述句 + 唯一确定的真值 (T/F)。
- **命题类型**: 原子命题 vs 复合命题。
- **五大联结词**: $\neg$ (非), $\wedge$ (与), $\vee$ (或), $\rightarrow$ (蕴涵), $\leftrightarrow$ (等价)。

关键运算特质

- $\neg$: 真假颠倒
- $\wedge$: 全真才真, 一假即假
- $\vee$: 一真即真, 全假才假
- $\rightarrow$: 前真后假才为假, 前假必为真
- $\leftrightarrow$: 同真同假才为真

在线主页与课程资源

■ 个人主页:

<https://matnoble.top>

■ 课程专栏:

<https://matnoble.top/courses/>

■ GitHub 仓库:

<https://github.com/MatNoble>

思考: Questions & Answers

“学贵善疑, 逻辑筑基”

感谢大家的专注聆听!

课件最新版本与补充资料将持续同步至课程主页。

现在进入自由提问与交流时间。