

1-2 命题公式及分类

第一章：命题逻辑



厦门大学嘉庚学院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

- 1 课前悬念:破案与逻辑计算
- 2 命题公式的定义与语法结构
- 3 命题公式的赋值与三大分类
- 4 真值表方法与系统求解
- 5 本节小结与知识图谱

破案与逻辑计算：从 人脑穷举到公式求解

PART 1

题:嫌疑人供词分析

警方抓获 A, B, C 三人, 查明三条线索完全属实:

1. 若 A 没作案, 则 B 也没作案。
2. B 和 C 两人中至少有一人作案。
3. 若 C 作案, 那么 A 一定也作案了。

问题: 到底谁参与了作案?

思考: 形式建模 vs 人脑穷举

设命题变项: a, b, c 分别表示 A, B, C 作案。

■ 线索 1 $\implies \neg a \rightarrow \neg b$

■ 线索 2 $\implies b \vee c$

■ 线索 3 $\implies c \rightarrow a$

总联合条件式:

$$G = (\neg a \rightarrow \neg b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \rightarrow a)$$

启示: 避免人脑分叉讨论 ($2^3 = 8$ 种可能), 将其转化为求公式为真的赋值解!

合式公式 (WFF)、优先级与子公式

PART 2

基本组成元素

- **命题常项**: 真值常数 $\top$ (1) 或 $\bot$ (0)。
- **命题变项**: 占位符号 $p, q, r \in \{0, 1\}$ 。

思考:形式语法意义

并非任意符号串都是公式。只有严格符合构造规则的符号串, 才具备明确的**逻辑语义**。

定义 1-2.1: WFF 递归四条规则

1. **基底步**: 单个常项或变项是 WFF (原子式)。
2. **单目归纳**: 若 A 是 WFF $\implies (\neg A)$ 是 WFF。
3. **双目归纳**: 若 A, B 是 WFF $\implies (A * B)$ 是 WFF, 其中 $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ 。
4. **极小性**: 仅限有限次应用规则 1-3 构成的符号串才是 WFF。

为了避免过度冗长繁杂的外层括号,数理逻辑约定了**标准运算优先级**(从高到低):

$\neg$ $>$ $\wedge$ $>$ $\vee$ $>$ $\rightarrow$ $>$ $\leftrightarrow$

规范化简示例:

- 严格形式: $((p \wedge (\neg q)) \vee r) \rightarrow s$
- 规范精简: $p \wedge \neg q \vee r \rightarrow s$
- 结合方向: 同级联结词并列时, 默认自左向右结合。

注意: 工程实践强烈建议

虽然规定 $\wedge$ 优先于 $\vee$, 但在遇到 $\wedge$ 与 $\vee$ 混合出现 (如 $p \wedge q \vee r$) 时, **强烈建议保留局部括号** 写作 $(p \wedge q) \vee r$, 以彻底消除视觉歧义!

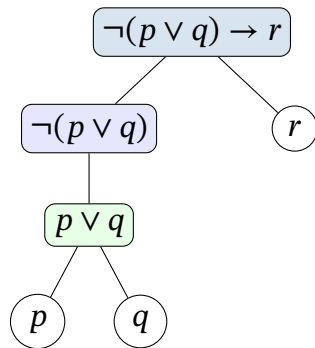
定义 1-2.2: 子公式

若 A 是合式公式, 且符号串 B 包含在 A 中, 同时 B 本身也是一个合式公式, 则称 B 为 A 的**子公式**。

层次特点:

- 最大子公式: A 自身;
- 零级子公式: 所有的单个命题变项与常项。

实战: 分解 $\neg(p \vee q) \rightarrow r$:



0 层: p, q, r 1 层: $p \vee q$ 2 层: $\neg(p \vee q)$ 3 层: 全公式

真值赋值与公式三大分类定理

PART 3

定义: 设 A 是含有 n 个命题变项 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 的命题公式。给每个变项指定一个真值 (0 或 1), 称为对公式 A 的一个**赋值** (或指派)。

赋值组合总数: n 个变项共有 2^n 种不同的真值赋值组合。

成真与成假赋值

- **成真赋值:** 使公式 A 的最终计算真值为 **1** 的赋值。
- **成假赋值:** 使公式 A 的最终计算真值为 **0** 的赋值。

思考: 数学空间的维度

含 n 个变项的逻辑公式, 其真值语义完全由 n 维布尔超立方体 $\{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ 的映射唯一定义。

根据在所有 2^n 种可能赋值下的表现, 命题公式分为以下三大类:

1. 重言式 (永真式)

定义:

在所有 2^n 种赋值下,
公式真值恒为 1。

典型代表:

$p \vee \neg p$ (排中律)

$p \rightarrow p$

2. 矛盾式 (永假式)

定义:

在所有 2^n 种赋值下,
公式真值恒为 0。

典型代表:

$p \wedge \neg p$ (自相矛盾)

$\neg(p \rightarrow p)$

3. 可满足式

定义:

至少存在一种赋值
使公式真值为 1。

细分:

包含重言式, 以及有
真有假的偶然式。

定理 1-2.1: 对偶否定定理

- 公式 A 是重言式 $\iff \neg A$ 是矛盾式。
- 公式 A 是矛盾式 $\iff \neg A$ 是重言式。
- 公式 A 是不可满足的 $\iff A$ 是矛盾式。

定理 1-2.2: 封闭性法则

- 两个重言式的 $\wedge$ 或 $\vee$, 仍为**重言式**。
- 两个矛盾式的 $\wedge$ 或 $\vee$, 仍为**矛盾式**。

题: 课堂快问快答

已知公式 A 为重言式, 公式 B 为矛盾式, 公式 C 为偶然式。判定下列公式类别:

1. $A \vee B \implies$ **重言式**
($1 \vee 0 \equiv 1$)
2. $A \wedge B \implies$ **矛盾式**
($1 \wedge 0 \equiv 0$)
3. $A \rightarrow B \implies$ **矛盾式**
($1 \rightarrow 0 \equiv 0$)
4. $B \rightarrow C \implies$ **重言式**
($0 \rightarrow C \equiv 1$)

真值表的标准构造与自动求解

PART 4

真值表构造四大铁律:

1. 行数确定: n 个变项 $\Rightarrow$ 严格 2^n 行。
2. 行序排列: 按变项字母表顺序, 依据二进制自然递增序排列 (00 $\rightarrow$ 01 $\rightarrow$ 10 $\rightarrow$ 11)。
3. 三区列分布:
 - 左(指派区): 基础变项列;
 - 中(子公式区): 按优先级递进;
 - 右(结果区): 最终目标公式列。
4. 结果判定: 观察最右列全 1 为重言, 全 0 为矛盾, 否则偶然。

变项指派区		子公式区		总结果区
p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge \neg p$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	0

结论: 该公式在 00, 01 时成真, 在 10, 11 时成假, 属于可满足的偶然式。



题:真值表法判定公式性质

- 构造公式 $A = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ 的真值表,并判断其公式类别。

含 3 个变项 p, q, r , 共 $2^3 = 8$ 行:

p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	前件: $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$	后件: $p \rightarrow r$	全公式 A
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

判定结论

全公式列在所有 8 种赋值下结果恒为 1, 故该公式是**重言式** (此式即为著名的**假言三段论**)。

回顾案情公式: $G = (\neg a \rightarrow \neg b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \rightarrow a)$

a	b	c	$\neg a \rightarrow \neg b$	$b \vee c$	$c \rightarrow a$	总联合条件 G
0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

案情真相: 在使 $G = 1$ 的所有可能解中, a 的取值恒为 1! 因此: A 必定作案, B 与 C 中至少有一人参与。

本节小结与知识图谱

PART 5

语法与结构

- **合式公式 (WFF):** 递归 4 条构造法则。
- **运算优先级:**
 $\neg > \wedge > \vee > \rightarrow > \leftrightarrow$ 。
- **子公式:** 大公式由子公式树状组装而成。

语义与分类

- **真值赋值:** n 变量 $\implies 2^n$ 种指派。
- **公式三大分类:** 重言式 (全 1)、矛盾式 (全 0)、可满足式 (含偶然式)。
- **真值表判定法:** 三区标准画表法。

在线主页与课程资源

- 个人主页:

<https://matnoble.top>

- 课程专栏:

<https://matnoble.top/courses/>

- GitHub 仓库:

<https://github.com/MatNoble>

思考: Questions & Answers

“学贵善疑, 逻辑筑基”

感谢大家的专注聆听!

课件最新版本与补充资料将持续同步至课程主页。

现在进入自由提问与交流时间。