

1-3 命题等值演算

第一章：命题逻辑



厦门大学嘉庚学院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

- 1 课前破冰:超越真值表的算力瓶颈
- 2 逻辑等值的定义与充要定理
- 3 基本等值式系统全景图
- 4 等值演算规则与证明范式
- 5 等值演算综合实战演练
- 6 本节小结与知识图谱

超越真值表：从组合爆炸到代数化简

PART 1

真值表机械性与算力死局：

变项 n	行数 2^n	计算可行性
$n = 3$	8	心算秒解
$n = 10$	10^3	需纸笔列举
$n = 20$	10^6	普通 PC 需数秒
$n = 50$	$\approx 10^{15}$	超算需 13 天!

注意：代数化简之必要

穷举必达但指数暴增 $\implies$ 必须引入
等值演算化简!

题：业务代码审查

某电商结算风控逻辑：

- 设 $A: \text{is_vip}$ (会员)
- 设 $B: \text{has_coupon}$ (优惠)

判定式： $A \vee (\neg A \wedge B)$ 。

思考：能否像初等代数一样
秒速化简？

逻辑等值关系与双蕴涵重言式

PART 2

定义 1-3.1: 逻辑等值

设 A, B 是两个命题公式。若在各个命题变项的**所有可能赋值**下, A 与 B 的**真值均完全相同**, 则称 A 与 B **逻辑等值** (或等价)。

符号记法:

- 记作 $A \Leftrightarrow B$ 或 $A \equiv B$ 。

注意: $\Leftrightarrow$ 不是逻辑联结词

- $\leftrightarrow$ 是公式内部的逻辑联结词 (对象语言运算符), 参与构成复合命题;
- $\Leftrightarrow$ 是元语言符号, 用来陈述“公式 A 和公式 B 之间具备等值关系”这一数学事实。

定理 1-3.1: 等值判定核心定理

$A \Leftrightarrow B \iff A \leftrightarrow B$ 是重言式

16 组基本等值式定律全景梳理

PART 3

1. 双重否定律 (Double Negation)

$$\neg\neg A \Leftrightarrow A$$

2. 幂等律 (Idempotence)

$$A \vee A \Leftrightarrow A$$

$$A \wedge A \Leftrightarrow A$$

3. 交换律 (Commutativity)

$$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$$

$$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$$

4. 结合律 (Associativity)

$$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$$

$$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$$



5. 分配律 (Distributivity)

$\wedge$ 对 $\vee$ 的分配:

$$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$\vee$ 对 $\wedge$ 的分配 (特别注意!):

$$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

核心差异: 普通代数加对乘不可分配, 而逻辑代数中 $\vee$ 与 $\wedge$ **完全对偶可分配!**

6. 德·摩根律 (De Morgan's Laws)

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

思考: 德·摩根律口诀

“非进括号, 与或对调, 各取其反”。
这是否定号向内渗透的唯一通用法则!

设 **1** 代表重言式(常真), **0** 代表矛盾式(常假):

7. 同一律 (Identity Laws)

$$A \wedge 1 \Leftrightarrow A$$

$$A \vee 0 \Leftrightarrow A$$

8. 零律 / 支配律 (Domination)

$$A \vee 1 \Leftrightarrow 1$$

$$A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$$

9. 排中律 (Excluded Middle)

$$A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$$

10. 矛盾律 (Contradiction)

$$A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$$

11. 吸收律 (Absorption)

$$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$$

$$A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$$



12. 蕴涵等值式 (Implication Law)

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$$

13. 等价等值式 (Equivalence Law)

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

14. 假言易位 / 逆否律 (Contraposition)

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$$

15. 输出律 (Exportation)

$$(A \wedge B) \rightarrow C \Leftrightarrow A \rightarrow (B \rightarrow C)$$

16. 归谬律 (Reductio Ad Absurdum)

$$(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \Leftrightarrow \neg A$$

置换规则、代替规则与标准证明范式

PART 4

规则 1: 置换规则 (Replacement)

设公式 A 是公式 Φ 的一个子公式。
若 $A \Leftrightarrow B$, 将 Φ 中的 A 替换为 B ,
所得公式 Φ' 与 Φ 逻辑等值:

$$\Phi(A) \Leftrightarrow \Phi(B)$$

性质: 局部手术法则, 改动局部子式不影响整体骨架。

规则 2: 代替规则 (Substitution)

设公式 $A(p_1, \dots, p_n)$ 是一个重言式。
用任意公式 $B_1, \dots, B_n$ 分别
统一代替 A 中出现的命题变项
 $p_1, \dots, p_n$, 所得公式仍为**重言式**。

思考: 规律的普遍性

已知 $p \vee \neg p \Leftrightarrow 1$, 则 $(q \wedge r \rightarrow s) \vee \neg(q \wedge r \rightarrow s) \Leftrightarrow 1$ 必然恒真!

经典例题剖析与代数推导演练

PART 5

题:求解前引问题

利用等值演算定律化简公式: $A \vee (\neg A \wedge B)$ 。

详细推导步骤:

$$A \vee (\neg A \wedge B) \Leftrightarrow (A \vee \neg A) \wedge (A \vee B)$$

($\vee$ 对 $\wedge$ 的分配律)

$$\Leftrightarrow 1 \wedge (A \vee B)$$

(排中律: $A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$)

$$\Leftrightarrow A \vee B$$

(同一律: $1 \wedge X \Leftrightarrow X$)

代码优化结论

原业务代码 IF (is_vip) OR (NOT is_vip AND has_coupon) 直接精简为:
IF (is_vip) OR (has_coupon)! 逻辑完全等价, 运行效率大幅提升。

题: 证明重言式

- 不通过真值表, 证明公式 $((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow (q \wedge r))$ 为重言式。

推导流程:

$$\begin{aligned} & ((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow (q \wedge r)) \\ \Leftrightarrow & \neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \vee (\neg p \vee (q \wedge r)) && \text{(蕴涵等值式)} \\ \Leftrightarrow & \neg(\neg p \vee (q \wedge r)) \vee (\neg p \vee (q \wedge r)) && \text{(分配律逆用: 提取 } \neg p \vee \text{)} \\ \Leftrightarrow & \neg X \vee X \quad (\text{设 } X = \neg p \vee (q \wedge r)) && \text{(形式抽象)} \\ \Leftrightarrow & 1 && \text{(排中律)} \end{aligned}$$

证毕:公式逻辑等值于常数 1, 故其为**重言式**。

本节小结与知识图谱

PART 6

三大解题利器

- **蕴涵消除**: $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$
- **否定下沉**: 德·摩根律将 $\neg$ 深入变项
- **与或分配**: 双向分配与逆向提取公因式

化简核心目标

- 消除 $\rightarrow$ 和 $\leftrightarrow$
- 缩减变项出现频次 (吸收律、同一律)
- 制造 $A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$ 或 $A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$

在线主页与课程资源

- 个人主页:

<https://matnoble.top>

- 课程专栏:

<https://matnoble.top/courses/>

- GitHub 仓库:

<https://github.com/MatNoble>

思考: Questions & Answers

“学贵善疑, 逻辑筑基”

感谢大家的专注聆听!

课件最新版本与补充资料将持续同步至课程主页。

现在进入自由提问与交流时间。