

1-4 命题范式与主范式

第一章：命题逻辑



厦门大学嘉庚学院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

- 1 课前悬念:出国考察方案与唯一性追求
- 2 基础构件:文字与普通范式
- 3 极小项与极大项:维度积木
- 4 主范式与唯一数学指纹
- 5 主范式应用与课前谜底
- 6 本节小结与知识图谱

出国考察方案决策：为什么逻辑公式需要统一规范？

PART 1



题: 选派约束条件

单位需从甲、乙、丙三人中选拔人员出国考察, 必须严格满足以下三项规定:

1. 若甲去, 则丙必须去;
2. 若乙去, 则丙不能去;
3. 甲和乙中必须去一人, 且只能去一人。

问题: 到底有几种可行的选派方案?

逻辑代数化表示: 设 p, q, r 分别表示甲、乙、丙去。

- 条件 1: $p \rightarrow r$
- 条件 2: $q \rightarrow \neg r$
- 条件 3: $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$

思考: 核心痛点

总约束为三式合取。我们如何迅速解出所有满足条件的赋值解, 并得到一个无冗余的标准表达?

文字、简单式与 DNF / CNF 基础范式

PART 2

定义 1-4.1: 文字 (Literal)

命题变项及其否定统称为**文字**。

例如: $p, \neg p, q, \neg q$ 。

简单析取式 (Clause): 仅由有限个文字构成的析取式。

示例: $p \vee \neg q \vee r$ 。

性质: 全假才为假, 一真即真。

简单合取式 (Phrase): 仅由有限个文字构成的合取式。

示例: $p \wedge \neg q \wedge \neg r$ 。

性质: 全真才为真, 一假即假。

注意: 重要极值判据

- 简单析取式为**重言式** $\iff$ 包含互补对 $p \vee \neg p$;
- 简单合取式为**矛盾式** $\iff$ 包含互补对 $p \wedge \neg p$ 。

析取范式 (DNF, Disjunctive Normal Form)

形如 $C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_m$ 的公式, 其中每个 C_i 均为简单合取式。
结构口诀: “与”的“或”。

示例: $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge r) \vee q$

合取范式 (CNF, Conjunctive Normal Form)

形如 $D_1 \wedge D_2 \wedge \cdots \wedge D_m$ 的公式, 其中每个 D_i 均为简单析取式。
结构口诀: “或”的“与”。

示例: $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee r \vee s)$

定理 1-4.1: 范式存在定理

任何命题公式都存在与之等值的析取范式 (DNF) 和合取范式 (CNF)。

Step 1: 消蕴等

目标: 消除 $\rightarrow, \leftrightarrow$
工具律:

$$A \rightarrow B \iff \neg A \vee B$$

$$A \leftrightarrow B \iff (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$$

Step 2: 非内移

目标: $\neg$ 直达变项
工具律:

$$\neg(A \vee B) \iff \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \wedge B) \iff \neg A \vee \neg B$$

$$\neg\neg A \iff A$$

Step 3: 分配展开

目标: 成型目标范式
分流策略:

求 DNF $\implies \wedge$ 对 $\vee$ 分配

求 CNF $\implies \vee$ 对 $\wedge$ 分配

流水线演进: 任意公式 $\xrightarrow{\text{消蕴等}}$ 纯与或非 $\xrightarrow{\text{非内移}}$ 文字层公式 $\xrightarrow{\text{分配展开}}$ **DNF / CNF**

极小项 (m_i) 与极大项 (M_i) 的数学定义

PART 3

定义 1-4.2: 极小项

含 n 个命题变项的简单合取式, 若每个变项与其否定有且仅出现一次, 且按字母顺序排列, 称为极小项。

二进制编码法则:

- 原变量 (如 p) 对应二进制 **1**;
- 否定变量 (如 $\neg p$) 对应二进制 **0**。

二元极小项完整一览表:

p	q	极小项	符号
0	0	$\neg p \wedge \neg q$	m_0
0	1	$\neg p \wedge q$	m_1
1	0	$p \wedge \neg q$	m_2
1	1	$p \wedge q$	m_3

思考: 关键特质

极小项 m_i 有且仅在第 i 组真值赋值下取值为 **1**, 其余 $2^n - 1$ 组赋值下全为 **0**!

定义 1-4.3: 极大项

含 n 个命题变项的简单析取式, 若每个变项与其否定有且仅出现一次, 称为极大项。

编码法则 (与极小项严格相反!):

- 原变量对应 **0**, 否定变量对应 **1**。

二元极大项完整一览表:

p	q	极大项	符号
0	0	$p \vee q$	M_0
0	1	$p \vee \neg q$	M_1
1	0	$\neg p \vee q$	M_2
1	1	$\neg p \vee \neg q$	M_3

定理 1-4.2: 互补对偶律

$$\neg m_i \Leftrightarrow M_i \quad \text{且} \quad \neg M_i \Leftrightarrow m_i$$

主析取范式 (PDNF) 与 主合取范式 (PCNF)

PART 4

主析取范式 (PDNF)

由极小项的析取构成的等值公式, 记作:

$$\sum m(i_1, i_2, \dots, i_k)$$

本质: 所有成真赋值的完整集合!

主合取范式 (PCNF)

由极大项的合取构成的等值公式, 记作:

$$\prod M(j_1, j_2, \dots, j_r)$$

本质: 所有成假赋值的完整集合!

定理 1-4.3: 主范式存在且唯一性定理 (终极判据)

任何命题公式都存在**唯一**的主析取范式 (PDNF) 和**唯一**的主合取范式 (PCNF) (不计项的先后顺序)。

两公式逻辑等值 $\iff$ 它们具有完全相同的主范式!

真值表法解题心法:

1. 绘制公式完整真值表;
2. 找到所有结果为 **1** 的行 $\rightarrow$ 收集对应的极小项 m_i 并析取 $\Rightarrow$ **PDNF**;
3. 找到所有结果为 **0** 的行 $\rightarrow$ 收集对应的极大项 M_j 并合取 $\Rightarrow$ **PCNF**。

p	q	编码	$p \rightarrow q$	对应主项
0	0	0	1	m_0
0	1	1	1	m_1
1	0	2	0	M_2
1	1	3	1	m_3

结论:

- $\text{PDNF}(p \rightarrow q) = m_0 \vee m_1 \vee m_3 = \sum m(0, 1, 3)$
- $\text{PCNF}(p \rightarrow q) = M_2 = \prod M(2)$

题: 求公式的主范式

用等值演算法求公式 $A = (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$ 的主析取范式与主合取范式。

补全变项推演 (PCNF: 缺项补 $\wedge(x \vee \neg x)$):

$$\begin{aligned} A &\Leftrightarrow (p \wedge q \wedge (r \vee \neg r)) \vee (\neg p \wedge r \wedge (q \vee \neg q)) \\ &\Leftrightarrow (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \\ &\Leftrightarrow m_7 \vee m_6 \vee m_3 \vee m_1 = \sum m(1, 3, 6, 7) \end{aligned}$$

互补指标快速得 PCNF: 全集 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \setminus \{1, 3, 6, 7\} = \{0, 2, 4, 5\}$, 故:

$$\text{PCNF}(A) = \prod M(0, 2, 4, 5) = M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \wedge M_5$$

主范式三大核心应用 与出国选派谜题求解

PART 5

综合三项约束,总公式 $S = (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow \neg r) \wedge ((p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q))$ 。
使用等值演算化为主析取范式:

p	q	r	编码	$p \rightarrow r$	$q \rightarrow \neg r$	排他或 $(p \oplus q)$	总条件 S
0	1	0	2	1	1	1	1 (m_2)
1	0	1	5	1	1	1	1 (m_5)

其余 6 组赋值计算均为 0。因此 $S = m_2 \vee m_5 = \sum m(2, 5)$ 。

最终决策方案

方案仅有两种:

1. m_2 (010): 仅乙一人去(甲不去, 丙不去);
2. m_5 (101): 甲和丙两人去(乙不去)。

本节小结与知识图谱

PART 6

基础范式 vs 主范式

- **普通范式 (DNF/CNF):** 不唯一, 仅要求二层扁平结构。
- **主范式 (PDNF/PCNF):** 唯一, 所有变项全部登场。
- **极小项 m_i :** 成真指派 ($p \rightarrow 1, \neg p \rightarrow 0$)。
- **极大项 M_i :** 成假指派 ($p \rightarrow 0, \neg p \rightarrow 1$)。

三大主范式应用

- **公式类型:** 含全部 2^n 个 m_i 为重言式; 空为矛盾式。
- **等值判断:** 主范式完全相同即等值。
- **逻辑求解:** 成真极小项即为约束方程的可行解!

在线主页与课程资源

- 个人主页:

<https://matnoble.top>

- 课程专栏:

<https://matnoble.top/courses/>

- GitHub 仓库:

<https://github.com/MatNoble>

思考: Questions & Answers

“学贵善疑, 逻辑筑基”

感谢大家的专注聆听!

课件最新版本与补充资料将持续同步至课程主页。

现在进入自由提问与交流时间。