

1-5 命题逻辑推理理论

第一章：命题逻辑



厦门大学嘉庚学院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

- 1 课前破冰：直觉陷阱与有效推理
- 2 推理的形式结构与有效性判据
- 3 自然推理系统核心规则集
- 4 形式证明的三大构造方法
- 5 案例综合实战与 AI 自动推理
- 6 本节小结与知识图谱

直觉陷阱与有效推理：从 生活对话到严密证明

PART 1

题:经典推论辨析

推论 1:

“若天下雨,地就会湿。现在地湿了,所以天下雨了。”

推论 2:

“若下雨,运动会延期。今天没下雨,所以绝不延期。”

注意:两大经典直觉谬误

■ 肯定后件谬误:

地湿可能是洒水车所致 $\implies$

$$(p \rightarrow q) \wedge q \not\Rightarrow p$$

■ 否定前件谬误:

不下雨也可能大风延期 $\implies$

$$(p \rightarrow q) \wedge \neg p \not\Rightarrow \neg q$$

思考:日常直觉推论在数学上成立吗?

思考:形式推理的本质

保真性 (Soundness): 在所有前提为真的情况下, 结论在逻辑上**必然为真**!

前提、结论与重言蕴涵判据

PART 2

定义 1-5.1: 推理的形式结构

设 $A_1, A_2, \dots, A_k$ (前提) 和 B (结论) 是命题公式。

称 B 是前提集推导出的**有效结论**, 当且仅当:

$(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \rightarrow B$ 是重言式

符号记法: 记作 $\{A_1, A_2, \dots, A_k\} \Rightarrow B$ 。

有效推理的三大判定途径

1. **真值表法**: 穷举所有赋值验证全真 (复杂度 2^n 暴力验证);
2. **等值演算法**: 代数化简前件合取蕴涵式为常数 1;
3. **自然推理系统 (本节核心)**: 从前提出发, 依据原子规则步步推导!

9 大常用原子推理规则

PART 3

1. 分离规则 (Modus Ponens, MP)

$$(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$$

肯定前件必肯定后件。

2. 拒取规则 (Modus Tollens, MT)

$$(p \rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$$

否定后件必否定前件(逆否思想)。

3. 假言三段论 (Hypothetical Syllogism, HS)

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow p \rightarrow r$$

蕴涵关系的传递链条。

4. 析取三段论 (Disjunctive Syllogism, DS)

$$(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q$$

二者必居其一, 排除一个必得另一个。

5. 化简规则 (Simplification, Simp)

$$p \wedge q \Rightarrow p \quad \text{且} \quad p \wedge q \Rightarrow q$$

6. 附加规则 (Addition, Add)

$$p \Rightarrow p \vee q$$

7. 合取引入规则 (Conjunction, Conj)

$$p, q \Rightarrow p \wedge q$$

8. 构造性两难 (Constructive Dilemma, CD)

$$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r) \Rightarrow q \vee s$$

9. 等价引入与消去规则

$$p \leftrightarrow q \Rightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \Rightarrow p \leftrightarrow q$$

直接法、附加前提 法 (CP) 与反证法 (IP)

PART 4

■ 题: 直接法证明

已知前提: $\{p \vee q, p \rightarrow s, q \rightarrow r\}$, 求证结论: $s \vee r$ 。

标准形式推导序列:

步骤编号	推导公式	依据规则 / 前件行号
(1)	$p \vee q$	前提引入 (P)
(2)	$p \rightarrow s$	前提引入 (P)
(3)	$q \rightarrow r$	前提引入 (P)
(4)	$(p \rightarrow s) \wedge (q \rightarrow r)$	(2)(3) 合取引入 (Conj)
(5)	$s \vee r$	(1)(4) 构造性两难 (CD)

证毕 ■

CP 规则核心定理

若结论形如条件式 $A \rightarrow B$, 则可将前件 A 作为**附加临时前提**放入前提集中, 证明目标转化为仅需推导出 B 。

数学依据(输出律):

$$(H \wedge A) \rightarrow B \iff H \rightarrow (A \rightarrow B)$$

题: CP 法实战演练

■ 前提: $p \rightarrow (q \rightarrow r), \neg s \vee p, q$
结论: $s \rightarrow r$

解题思路:

结论是 $s \rightarrow r$, 将 s 作为附加前提引入, 目标直指 r !

证明序列:

行号	公式	理由 / 规则
(1)	s	附加前提引入 (CP)
(2)	$\neg s \vee p$	前提引入 (P)
(3)	$\neg \neg s$	(1) 双重否定律
(4)	p	(2)(3) 析取三段论 (DS)
(5)	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	前提引入 (P)
(6)	$q \rightarrow r$	(4)(5) 分离规则 (MP)
(7)	q	前提引入 (P)
(8)	r	(6)(7) 分离规则 (MP)
(9)	$s \rightarrow r$	(1)–(8) CP 规则导出结论

证毕 ■

IP 规则核心原理

若要证明结论 B :

1. 假设结论不成立, 将 $\neg B$ 作为反设前提引入;
2. 结合已知前提推导出一个**自相矛盾式** $R \wedge \neg R \Leftrightarrow 0$;
3. 由矛盾断定: 反设不成立, 故 B 必真!

思考: 反证法的数学底色

归谬律:

$$(A \wedge \neg B \rightarrow 0) \iff (A \rightarrow B)$$

在直接推导受阻、结论包含复杂析取或否定时, 反证法常能起到“以退为进、化被动为主动”的奇效!

逻辑破案综合实战 与 AI 自动推理连接

PART 5

题:案情前提集

某珠宝店被盗, 警方审讯并锁定四名嫌疑人甲、乙、丙、丁 (分别记为 A, B, C, D 作案)。已知:

1. 甲或乙作案: $A \vee B$
2. 若甲作案, 则丙作案: $A \rightarrow C$
3. 若丁作案, 则乙不作案: $D \rightarrow \neg B$
4. 经确凿物证证实: 丙没有作案 ($\neg C$), 且丁作案了 (D)。

求证: 乙作案了, 但丁没有受甲指使。

严格形式证明序列:

行号	推导公式	规则依据
(1)	$A \rightarrow C$	前提引入 (P)
(2)	$\neg C$	前提引入 (P)
(3)	$\neg A$	(1)(2) 拒取规则 (MT) $\Rightarrow$ 甲无罪
(4)	$A \vee B$	前提引入 (P)
(5)	B	(3)(4) 析取三段论 (DS) $\Rightarrow$ 锁定乙作案!
(6)	$D \rightarrow \neg B$	前提引入 (P)
(7)	$\neg \neg B$	(5) 双重否定律
(8)	$\neg D$	(6)(7) 拒取规则 (MT) $\Rightarrow$ 发现案情前提内部矛盾!

思考: AI 与自动定理证明

在现代 AI 专家系统(如 Prolog 语言)与知识图谱推理引擎中,计算机正是通过运行此类分辨率算法(Resolution Principle)完成万亿级知识节点自动推导的。

本节小结与知识图谱

PART 6

三大推导方法

- **直接证明法**: 前提出发, 顺藤摸瓜。
- **附加前提法 (CP)**: 证 $P \rightarrow Q$, 引 P 证 Q 。
- **归谬反证法 (IP)**: 引 $\neg B$, 推导 0 得证。

四大最高频规则

- **MP**: $P \rightarrow Q, P \Rightarrow Q$
- **MT**: $P \rightarrow Q, \neg Q \Rightarrow \neg P$
- **HS**: $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$
- **DS**: $P \vee Q, \neg P \Rightarrow Q$

在线主页与课程资源

- 个人主页:

<https://matnoble.top>

- 课程专栏:

<https://matnoble.top/courses/>

- GitHub 仓库:

<https://github.com/MatNoble>

思考: Questions & Answers

“学贵善疑, 逻辑筑基”

感谢大家的专注聆听!

课件最新版本与补充资料将持续同步至课程主页。

现在进入自由提问与交流时间。