

4-1 集合的笛卡尔 积与二元关系

第四章：二元关系 · 维度的连接

张振



厦门大学嘉庚学院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

- 1 笛卡尔积:维度空间的构建
- 2 二元关系:逻辑深处的连接
- 3 表示法:刻画关系的语言
- 4 特殊形态与案例分析
- 5 总结与前瞻

从点到维度的跨越

PART 1



哲学家的直觉：

1637 年，笛卡尔在《几何学》中首次将代数与几何结合。

- **跨界影响：**用数对 $\langle x, y \rangle$ 表示平面上的点，彻底改变了数学的演进逻辑。
- **对离散数学的意义：**为“关系”提供了存储和表达的物理容器。

哲学思辨

变动中的永恒：坐标系不仅是位置的标记，它本质上是两个维度（集合）之间所有可能关联的“全域”。

定义:

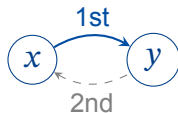
由两个元素 x, y 按特定顺序组成的二元组, 记为 $\langle x, y \rangle$ 。

关键判别 (序偶 vs 集合):

- 有序性: $\langle x, y \rangle \neq \langle y, x \rangle$ (除非 $x = y$)。
- 集合: $\{x, y\} = \{y, x\}$ 。

相等的判定规则

$$\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle \iff (a = c) \wedge (b = d)$$



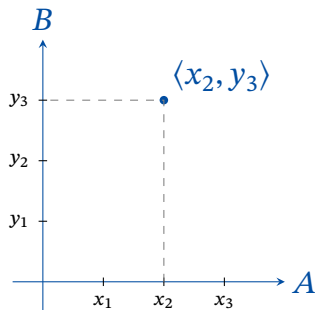


图:坐标系是 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 的子集

定义:

设 A, B 为集合, A 与 B 的笛卡尔积定义为:

$$A \times B = \{\langle x, y \rangle \mid (x \in A) \wedge (y \in B)\}$$

基数规律 (Cardinality):

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

思考题: 维度爆炸

如果 A 有 100 个元素, B 有 100 个元素, $A \times B$ 有多少个元素?
答: 10,000 个。这解释了为什么“多表查询”在数据库中代价极高。



题:基础运算与非交换性验证

设 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$, 求:

- 1. $A \times B$
- 2. $B \times A$
- 3. 判定并解释是否 $A \times B = B \times A$

解析步解:

- 1. $A \times B: \{\langle 1, a \rangle, \langle 1, b \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, a \rangle, \langle 3, b \rangle\}$
- 2. $B \times A: \{\langle a, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \langle a, 3 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \langle b, 3 \rangle\}$

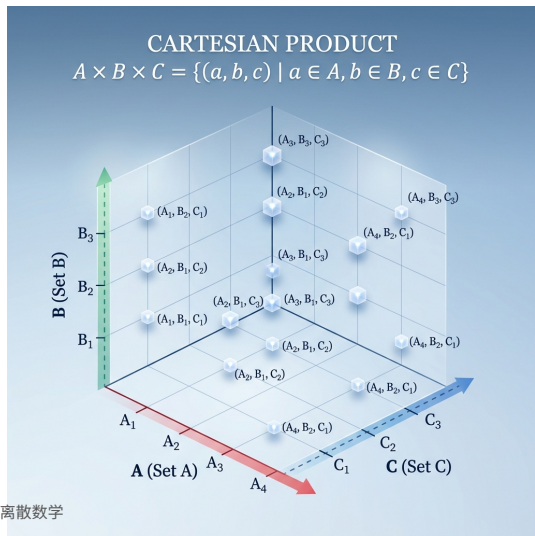
注意:非交换性结论

由于 $\langle 1, a \rangle \neq \langle a, 1 \rangle$, 故 $A \times B \neq B \times A$ 。

结论:笛卡尔积不满足交换律。

- 1. 非交换性: $A \times B \neq B \times A$ (除非 $A = B$, 或其中有空集)
- 2. 非结合性: $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$
- 3. 对并/交集的分配律:
 - $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
 - $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

逻辑提醒:分配律的存在证明了笛卡尔积虽然打破了交换对称性,但依然保持了代数结构的优美。



定义:

n 个集合 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的笛卡尔积定义为:

$$\prod_{i=1}^n A_i = \{\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \mid x_i \in A_i\}$$

[Engineering Metaphor]:

- C++: `'std::tuple<int, string, double>'`
- Python: `'(1, "Alice", 95.5)'`

算法本质:

笛卡尔积的生成过程在计算机程序中等价于 嵌套循环。

- 2 维: 双层 'for' 循环 $\rightarrow O(n^2)$
- k 维: k 层嵌套循环 $\rightarrow O(n^k)$

性能警示

随着维度的增加, 计算量呈指数级增长。这被称为“维数灾难”(Curse of Dimensionality) 的雏形。

Python 代码示例:

```
A = [1, 2]
B = ['a', 'b']
product = []
for x in A:
    for y in B:
        product.append((x, y))

# Result:
# [(1, 'a'), (1, 'b'), (2, 'a'), (2, 'b')]
```

从空间子集到结构涌现

PART 2

定义:

设 A, B 为集合, $A \times B$ 的任意子集 R 称为从 A 到 B 的 **二元关系** (Binary Relation)。

记号:

- 若 $\langle x, y \rangle \in R$, 记为 xRy 。
- 若 $\langle x, y \rangle \notin R$, 记为 $x \not R y$ 。

哲学思辨

逻辑的本质: 集合论研究的是“点”的堆砌, 而关系论研究的是“线”的连接。没有关系, 世界只是无序的元素; 有了关系, 才产生结构。

定义:

设 A 为集合, 其所有子集组成的集合称为 A 的**幂集** (2^A)。

核心推论:

- A 到 B 的所有可能关系, 正好构成了 $A \times B$ 的幂集 $\mathcal{P}(A \times B)$ 。
- 空关系 $\emptyset$ 与全域关系 E 都是幂集的极端元素。

逻辑闭环

理解计数: 为什么关系的总数是 $2^{|A \times B|}$? 因为每个关系都是笛卡尔积的一个子集。

组合数学原理:

若 $|A| = m, |B| = n$, 则:

1. 笛卡尔积的大小: $|A \times B| = m \cdot n$
2. 二元关系总数: $2^{|A \times B|} = 2^{m \cdot n}$

经典考题

设 $A = \{1, 2, 3\}$, 问 A 上能定义多少个不同的二元关系?

解析: $A \times A$ 有 $3 \times 3 = 9$ 个序偶。关系的总数即子集的总数, 为 $2^9 = 512$ 个。

从矩阵到图形的映射

PART 3

设 $A = \{x_1, \dots, x_n\}, B = \{y_1, \dots, y_m\}, R \subseteq A \times B$ 。

$$\mathbf{M}_R[i, j] = \begin{cases} 1, & \langle x_i, y_j \rangle \in R \\ 0, & \langle x_i, y_j \rangle \notin R \end{cases}$$

计算机视角:位运算

关系矩阵是位运算处理逻辑关系的底层核心。它将抽象的关系转化为计算机可快速并行处理的 0-1 数组。

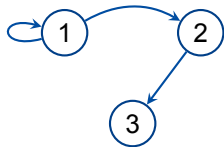


图:关系图:节点代表元素,边代表关联

规则:

- 节点 (Node): 集合中的元素。
- 有向边 (Edge): $\langle x, y \rangle \in R \implies$ 从 x 到 y 的箭头。
- 自环 (Loop): 如果 xRx 。

极端案例与数学实例

PART 4

设 R 是 A 上的关系:

- 1. 空关系 $\emptyset$: 没有任何序偶。对应记录全 0 的矩阵。
- 2. 全域关系 $E_A = A \times A$: 包含所有序偶。对应全 1 矩阵。
- 3. 恒等关系 $I_A = \{\langle x, x \rangle \mid x \in A\}$: 对应单位矩阵 $\mathbf{I}$ 。

视觉对冲:通过矩阵理解特殊关系,比纯集合定义要直观得多。

定义:

$$R_{\leq} = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge x \leq y\}$$

矩阵表现 ($A = \{1, 2, 3\}$):

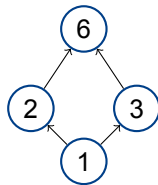
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

性质观察

矩阵呈现上三角形式,反映了全序关系的单向增长性。

有向图特征:

- 1 是所有正整数的起始点。
- 素数节点(除了 1 的指向外)都是逻辑孤岛。
- 关系揭示了数轴背后的**层级结构**。





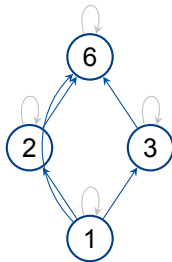
题:图论表示练习

- 设 $A = \{1, 2, 3, 6\}$, 关系 R 为 A 上的整除关系 $|$ 。
请列出 R 的所有序偶, 并画出其有向图。

1. 序偶集合列举:

$$R = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 6 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 6 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 6 \rangle, \langle 6, 6 \rangle\}$$

2. 有向图结构:





题:结构判别

设 $A = \{a, b, c\}$, 判断下列对象是否属于 $A \times A \times A$?

- 1. $\langle a, b, c \rangle$
- 2. $\langle \langle a, b \rangle, c \rangle$
- 3. $\langle a, \langle b, c \rangle \rangle$

判别结果:

- 1: 属于。标准三元序偶。
- 2: 不属于。这是 $(A \times A) \times A$ 的元素(二元序偶)。
- 3: 不属于。这是 $A \times (A \times A)$ 的元素(二元序偶)。

注意:深度警示:笛卡尔积的非结合性

在集合论的严谨定义中,笛卡尔积不满足结合律:

$$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C) \neq A \times B \times C$$

题:从矩阵倒推图与集合

已知 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 上的关系矩阵为:

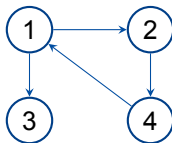
$$\mathbf{M}_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

请回答:1. 列出关系 R 的集合表达式。2. 画出其关系图。

1. 集合列举: 根据矩阵中 1 的位置 (行 i , 列 j):

$$R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 4, 1 \rangle\}$$

2. 关系图绘制:



总结与前瞻

PART 5

- **笛卡尔积**: 维度跃迁的核心, $|A| \cdot |B|$ 。分配律是代数简化的重点。
- **二元关系**: 笛卡尔积的子集, 逻辑连接的本质。
- **三位一体表示法**: 集合论描述 (严谨) $\leftrightarrow$ 关系矩阵 (机读) $\leftrightarrow$ 关系图 (直观)。
- **特殊案例**: 能够识别并构建空关系、全域关系与恒等关系。

哲学洞察: 所有的知识体系, 本质上都是在构建实体 (集合) 及其关联 (关系)。

下节预告

4-2 关系的运算:复合与逆

透过层层链条,看清逻辑的背后传递。