

4-2关系的运算与性质

第四章：二元关系·从连接到结构的演进

张振



厦门大学嘉庚学院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

- 1 前置回顾:关系及其映射域
- 2 关系的运算:逻辑的叠加与传递
- 3 关系的性质:结构的形态判定
- 4 关系的闭包:演化的终极状态
- 5 总结与综合练习

回顾：定义的延伸

PART 1

设 R 是从 A 到 B 的关系:

1. **定义域 (Domain):** $\text{dom}(R) = \{x \mid \exists y(\langle x, y \rangle \in R)\}$
 - 解释: 所有作为序偶第一个分量的元素集合。
2. **值域 (Range):** $\text{ran}(R) = \{y \mid \exists x(\langle x, y \rangle \in R)\}$
 - 解释: 所有作为序偶第二个分量的元素集合。
3. **域 (Field):** $\text{fld}(R) = \text{dom}(R) \cup \text{ran}(R)$

工程隐喻: 在数据库系统(如 MySQL)中,这分别对应于一张表的“主键列”(PK)与“外键引出列”(FK)的取值全集。



题: 性质全检索

- 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{\langle x, y \rangle \mid (x, y \in A) \wedge (x + y = 5)\}$ 。
求 $\text{dom}(R)$, $\text{ran}(R)$, $\text{fld}(R)$ 。

解析流程:

- 列举关系: $R = \{\langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 4, 1 \rangle\}$
- 提取 Domain: $\text{dom}(R) = \{1, 2, 3, 4\} = A$
- 提取 Range: $\text{ran}(R) = \{1, 2, 3, 4\} = A$
- 提取 Field: $\text{fld}(R) = A$

结论: 当一个关系覆盖了整个集 A 时, 我们称其为 A 上的“全域关系”雏形。

关系的运算：逻辑的叠加与传递

PART 2

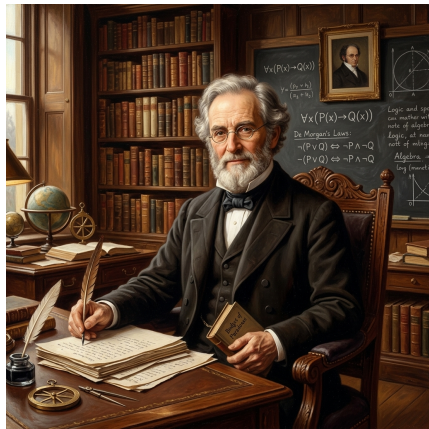


图: 逻辑领域的开驱者

关系的数学化:

德·摩根(1806—1871)不仅提出了著名的“德·摩根定律”，他还是现代“关系逻辑”的奠基人。

- **突破观点:** 他率先意识到, 数学不应仅限于处理数值(算术), 还应处理“关联”(关系)。
- **演进:** 他的工作启发了皮尔斯(C.S. Peirce)将关系理论引入逻辑符号体系。

哲学洞察: 逻辑不仅是思考的工具, 更是揭开宇宙间万物连接面纱的钥匙。

关系 $R, S \subseteq A \times B$ 本质上是集合, 其运算完全遵循集合论:

- **并运算:** $R \cup S$ (满足条件 R 或满足条件 S)
- **交运算:** $R \cap S$ (同时满足两个条件)
- **差运算:** $R - S$ (满足 R 且不满足 S)
- **补关系:** $\bar{R} = (A \times B) - R$ (所有不满足 R 的关联)

矩阵视角的对称性

$M_{R \cup S} = M_R \vee M_S$ (逐元素布尔“或”)

$M_{R \cap S} = M_R \wedge M_S$ (逐元素布尔“与”)

定义:

将关系 R 中的所有序偶分量调换顺序,
记为 R^{-1} :

$$R^{-1} = \{\langle y, x \rangle \mid \langle x, y \rangle \in R\}$$

性质:

- $(R^{-1})^{-1} = R$
- $\text{dom}(R^{-1}) = \text{ran}(R)$

矩阵表现:

$$\mathbf{M}_{R^{-1}} = \mathbf{M}_R^T$$

(矩阵转置)

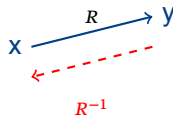


图: 逆关系: 物理意义的“反向”



题:视角翻转练习

设 $A = \{1, 2, 3\}$, 关系 $R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$ 。

1. 写出 R^{-1} 的集合表达式。
2. 写出 R 和 R^{-1} 的关系矩阵并验证转置关系。

1. 集合列举: 直接交换 R 中每一项的顺序:

$$R^{-1} = \{\langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle\}$$

2. 矩阵验证:

$$\mathbf{M}_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_{R^{-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

显然满足轴对称转置关系 $\mathbf{M}_{R^{-1}} = \mathbf{M}_R^T$ 。

定义:

设 $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C$, 则 $S \circ R$ 为:

$$S \circ R = \{\langle x, z \rangle \mid \exists y(xRy \wedge ySz)\}$$

思考: 因果传递

如果 x 导致 y , 且 y 导致 z , 那么 x 间接导致 z 。复合运算是世界“连通性”的底层逻辑。

注意符号顺序

警告: 数学习惯常记为 $S \circ R$ (先做 R 再做 S), 这与复合函数 $(g \circ f)(x)$ 的逻辑一致。

矩阵实现:

$$\mathbf{M}_{S \circ R} = \mathbf{M}_R \odot \mathbf{M}_S$$

(布尔矩阵乘法)

在现代数据库系统中, **Inner Join** 本质上就是在计算两个关系的复合。

- 表 A (员工-部门): (Ross, IT)
- 表 B (部门-位置): (IT, Floor 3)
- 复合结果 (员工-位置): (Ross, Floor 3)

工程本质: 数据库引擎通过“索引查找”优化中间项 y 的搜索, 这正是离散数学中 B 集合元素的“中继”角色。

题:复合矩阵推导

- 设 $A = \{a, b, c\}$, 且 $\mathbf{M}_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 。
求 $R^2 = R \circ R$ 的关系矩阵 $\mathbf{M}_{R^2}$ 。

解析流程:

$$\mathbf{M}_{R^2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 元素验证: $(1, 3) = 1$ 是因为第 1 行与第 3 列的布尔内积

$$(1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) = 1$$

- 直观映射: 节点 1 经过 2 可到达 3。



题:理论推证

证明关系复合运算满足结合律: $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$ 。

证明核心步解:

- $\langle x, w \rangle \in T \circ (S \circ R)$
- $\iff \exists z(\langle x, z \rangle \in S \circ R \wedge \langle z, w \rangle \in T)$
- $\iff \exists z(\exists y(\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in S) \wedge \langle z, w \rangle \in T)$
- $\iff \exists y \exists z(xRy \wedge ySz \wedge zTw)$ (构成完整因果链)
- $\iff \exists y(\langle x, y \rangle \in R \wedge \exists z(\langle y, z \rangle \in S \wedge \langle z, w \rangle \in T))$
- $\iff \exists y(\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, w \rangle \in T \circ S)$
- $\iff \langle x, w \rangle \in (T \circ S) \circ R$

结论: 关系的复合不仅具有逻辑传递性, 在代数结构上也呈现出完美的结合性。

定理 4.1: 逆与复合的交互

设 R, S, T 为任意关系, 则:

1. 双重否定律: $(R^{-1})^{-1} = R$
2. 域的对标: $\text{dom}(R^{-1}) = \text{ran}(R), \quad \text{ran}(R^{-1}) = \text{dom}(R)$
3. 结合律: $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$
4. 穿脱原则: $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$ (注意顺序反转!)

定理 4.2: 分配律与单调性

设 R, S, T 为任意关系, 则:

1. 对并集的完美分配: $R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$
2. 对交集的缩减分配: $R \circ (S \cap T) \subseteq (R \circ S) \cap (R \circ T)$

思考题: 为什么交集只有包含关系? 能否勾勒出一个反例? (提示: 考虑 R 是一个“多对一”映射)

定义:

设 R 为从 A 到 B 的关系, $A' \subseteq A$, 则 R 在 A' 上的限制记为 $R|_{A'}$:

$$R|_{A'} = \{\langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in R \wedge x \in A'\}$$

观察点:

- 限制运算是关系的“缩减”过程。
- 在关系图中, 等价于只保留起点在 A' 中的有向边。

思考: 聚焦的力量

当我们只关心特定子群体的行为时, 限制运算能帮助我们剥离无关的背景噪声。

定义:

设 $R \subseteq A \times B, A' \subseteq A$, 则 A' 在 R 下的像记为 $R[A']$:

$$R[A'] = \{y \mid \exists x \in A' (\langle x, y \rangle \in R)\}$$

注意符号辨析

警告: 注意 $R[A']$ 得到的通常是一个集合, 而不是单个元素。

[Metaphor View]: 广播与辐射

- 如果 A' 是信号源, 像 $R[A']$ 就是所有能接收到信号的终端集合。
- 这是研究逻辑链条中“一步可达性”的核心工具。

限制 $R|_{A'}$

- 本质: 是 **关系** (序偶的子集)。
- 运算: $R \cap (A' \times B)$ 。
- 直观: 切掉起点不在 A' 的箭头。

像 $R[A']$

- 本质: 是 **集合** (元素的子集)。
- 运算: $\text{ran}(R|_{A'})$ 。
- 直观: 所有箭头指向的终点底色。

口诀: 限制是“留下一部分线”,像是“找到这一部分线指向的头”。

题:子集运算判定

设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 1 \rangle\}$ 。

设 $A' = \{1, 2\}$, 求:

1. $R|_{A'}$
2. $R[A']$

解析流程:

1. 限制运算 $R|_{A'}$: 锁定第一分量在 $\{1, 2\}$ 中的序偶:

$$R|_{A'} = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$$

2. 像运算 $R[A']$: 找出所有起自 $\{1, 2\}$ 的序偶的第二分量:

- $1 \rightarrow 2$
- $2 \rightarrow 3$
- 汇总结果: $R[A'] = \{2, 3\}$

运算符	集合表达式	关系矩阵形式	关系图表现
$\bar{R}$ (补)	$(A \times B) - R$	$\mathbf{M}_{\bar{R}} = \bar{\mathbf{M}}_R$	图的“补图”(全图边取反)
$R \cap S$ (交)	$\{\dots \mid xRy \wedge xSy\}$	$\mathbf{M}_{R \cap S} = \mathbf{M}_R \wedge \mathbf{M}_S$	保留两图共有的边
$R \cup S$ (并)	$\{\dots \mid xRy \vee xSy\}$	$\mathbf{M}_{R \cup S} = \mathbf{M}_R \vee \mathbf{M}_S$	合并两图所有的边
R^{-1} (逆)	$\{\langle y, x \rangle \mid \langle x, y \rangle \in R\}$	$\mathbf{M}_{R^{-1}} = \mathbf{M}_R^T$	每条有向边做“反向”
$S \circ R$ (复合)	$\{\dots \mid \exists y(xRy \wedge ySz)\}$	$\mathbf{M}_{S \circ R} = \mathbf{M}_R \odot \mathbf{M}_S$	两步可达的有向路径

教学提示:矩阵形式是计算机处理的首选,而关系图是人类直观分析(如路径可达性)的利器。

定义 4.10: 关系的 n 次幂

设 R 为 A 上的关系, $n \in \mathbb{N}$:

1. $R^0 = I_A$ (恒等关系)
2. $R^{n+1} = R^n \circ R$

■ 直观含义: R^n 表示在关系图中, 经过 **恰好 n 步** 能够到达的所有路径。

■ 矩阵形式: $\mathbf{M}_{R^n} = \underbrace{\mathbf{M}_R \odot \mathbf{M}_R \odot \cdots \odot \mathbf{M}_R}_{n \text{ 个}}$

定理 4.3: 指数律

设 R 为 A 上的关系, $m, n \in \mathbb{N}$, 则:

1. $R^m \circ R^n = R^{m+n}$
2. $(R^m)^n = R^{mn}$

证明简述: 对 n 进行数学归纳法。利用复合运算的结合律即可完成推导。

题: 性质判定

设 $A = \{1, 2\}$, $R = \{\langle 1, 1 \rangle\}$, $S = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle\}$, $T = \{\langle 2, 2 \rangle\}$ 。

1. 求 R^2 。
2. 验证 $S \circ (R \cap T)$ 与 $(S \circ R) \cap (S \circ T)$ 的包含关系。



1. 幂运算: $R^2 = \{\langle 1, 1 \rangle\} \circ \{\langle 1, 1 \rangle\} = \{\langle 1, 1 \rangle\} = R$ 。

2. 包含关系验证:

- 左侧: $R \cap T = \emptyset \implies S \circ \emptyset = \emptyset$ 。
- 右侧: $S \circ R = \{\langle 1, 1 \rangle\}$, $S \circ T = \{\langle 1, 2 \rangle\}$ 。
- 交集: $\emptyset$ 。
- 结论: 满足 $S \circ (R \cap T) \subseteq (S \circ R) \cap (S \circ T)$ 。

关系的性质：结构的形态判定

PART 3

设 R 是 A 上的关系:

- **自反性:** $\forall x \in A, \langle x, x \rangle \in R$ (所有人都是自己的朋友)
 - 矩阵: 主对角线全为 1。
 - 有向图: 每个节点都有自环。
- **反自反性:** $\forall x \in A, \langle x, x \rangle \notin R$ (没有人是自己的儿子)
 - 矩阵: 主对角线全为 0。
 - 有向图: 没有任何节点有自环。

[Error Alert]

逻辑陷阱] 自反与反自反“不是”互补的!

存在既不自反也不反自反的关系。就像一个关系网,有的人关注了自己,有的人没关注。

- 对称性: $\langle x, y \rangle \in R \implies \langle y, x \rangle \in R$
 - 矩阵: $\mathbf{M}_R = \mathbf{M}_R^T$ (对称矩阵)。
 - 有向图: 节点间的边都是成对出现的双向箭头。
- 反对称性: $(\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R) \implies x = y$
 - 矩阵: 若 $m_{ij} = 1$ ($i \neq j$), 则 $m_{ji} = 0$ 。
 - 有向图: 不同节点间最多只有一条单向边。

[Error Alert

反对称性误区] “反”对称 $\neq$ “不对称”!

如果 $\langle 1, 1 \rangle \in R$, 它并不违反反对称性。它只禁止不同元素间的“双向互动”。

定义:

$$\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \implies \langle x, z \rangle \in R$$

- 判定定理: $\mathbf{M}_R \odot \mathbf{M}_R \leq \mathbf{M}_R$ (即 $R^2 \subseteq R$)
- 典型案例: “大于”关系、“整除”关系、“祖先”关系。

哲学探索: 传递性是建立“序列”与“层级”的先决条件。没有传递性, 逻辑将碎片化。

判定规则:

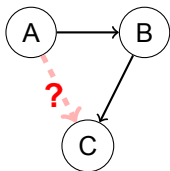
如果在图中发现以下结构:

- 存在两段折线: $A \rightarrow B$ 条和 $B \rightarrow C$ 。
- 但 **缺失**了连接起点的底边 $A \rightarrow C$ 。

那么该关系就**一定不是**传递的。

口诀:

有“折线”必有“底边”。



传递性缺失的典型信号

题:性质全检索

设 $A = \{1, 2, 3\}$, 关系 $R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$ 。
请判断其具有哪些性质?

解析流程:

1. 自反性: 所有自环均在, 满足。
2. 对称性: $\langle 1, 2 \rangle$ 配对 $\langle 2, 1 \rangle$, 满足。
3. 反对称性: 存在 $1 \leftrightarrow 2$ 双向边, 不满足。
4. 传递性: $\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle \in R \implies \langle 1, 1 \rangle \in R$, 满足。

结论: 该关系具有自反、对称、传递性, 是一个等价关系。

性质	逻辑定义	关系矩阵 $\mathbf{M}_R$	关系图图示
自反性	$\forall x(\langle x, x \rangle \in R)$	主对角线全为 1	每个顶点都有自环
反自反性	$\forall x(\langle x, x \rangle \notin R)$	主对角线全为 0	每个顶点都无自环
对称性	$xRy \implies yRx$	对称矩阵 ($\mathbf{M}_R = \mathbf{M}_R^T$)	边必成对出现 (或无边)
反对称性	$xRy \wedge yRx \implies x = y$	$r_{ij} = 1 \implies r_{ji} = 0 (i \neq j)$	顶点间最多只有单向边
传递性	$xRy \wedge yRz \implies xRz$	$\mathbf{M}_R \odot \mathbf{M}_R \leq \mathbf{M}_R$	有 $i \rightarrow j \rightarrow k$ 必有 $i \rightarrow k$



现状调查:

我们已经掌握了如何“判定”一个关系的性质。但在工程实践中,我们更关心:

- 如果逻辑链路不闭合(如社交网络不具备传递性),我们能否通过“最小代价”修补它?
- **闭包**就是系统从不完善状态向理想状态演化的“终极稳定点”。

哲学思辨

闭包的本质:它是包含原关系的、具备某种性质的“最小上界”。在约束下追求完美的妥协。

关系的闭包：演化的终极状态

PART 4

直观理解: 给一个不具备某种性质的关系 R , “补”上最少的序偶, 使其具备该性质。

1. 自反闭包 $r(R): R \cup I_A$
2. 对称闭包 $s(R): R \cup R^{-1}$
3. 传递闭包 $t(R): R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$

物理隐喻: 自反闭包是“回家的路”; 对称闭包是“双向车道化”; 传递闭包是“开辟所有通达路径”。



题:补全性质

设 $A = \{1, 2, 3\}$, $R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$ 。求:

1. 自反闭包 $r(R)$
2. 对称闭包 $s(R)$

1. 自反闭包 $r(R)$: 补全所有自环 $\langle i, i \rangle$:

$$r(R) = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$$

2. 对称闭包 $s(R)$: 补全所有反向边:

$$s(R) = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle\}$$

定理 4.4: 算子的互不干扰性

设 R 为 A 上的关系:

1. $rs(R) = sr(R)$ (自反与对称可以按任意顺序补齐)
2. $rt(R) = tr(R)$
3. $st(R) = ts(R)$

直观理解: 给图补上自环, 并不会破坏它原有的对称性或传递性; 反之亦然。这些“补丁”算子在逻辑上是正交的。

可能认识的人:

在社交网络中,系统通过判定传递性来推荐好友。

- 你认识 A , A 认识 B 。
- 在传递闭包中,你们是“级联可达的”。

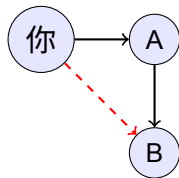
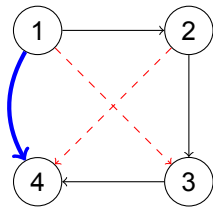


图:传递闭包:补全一切逻辑路径

操作策略:贪心式“补捷径”

1. **一阶补全:** 找出所有长度为 2 的路径 $i \rightarrow j \rightarrow k$, 并补上斜向边 $i \rightarrow k$ 。
2. **二阶补全:** 检查补齐后的图, 是否产生了新的“折角”(即 $i \xrightarrow{\text{新}} k \rightarrow l$), 继续补齐。
3. **收敛:** 直到没有多余的捷径可补。



小贴士: 这正是 Warshall 算法在“图”层面所做的脏活累活。

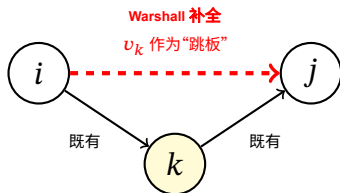
核心意图:

计算传递闭包的核心矛盾是查找“无穷路径”。Warshall 的天才之处在于:

通过 **限定中间节点**, 将全局搜索演化为 n 次局部更新。

中继站原则

如果 i 能直达 k , 且 k 能直达 j ,
那么 i 就可以通过 k 辐射到 j 。



状态转移方程: $m_{ij}^{(k)} = m_{ij}^{(k-1)} \vee (m_{ik}^{(k-1)} \wedge m_{kj}^{(k-1)})$

手算工业级算法 (The Cross Rule)

对于第 k 次迭代:

1. 定行列: 固定矩阵的第 k 行和第 k 列。
2. 找 1 集:
 - 找出第 k 列中为 1 的所有行索引集 I 。
 - 找出第 k 行中为 1 的所有列索引集 J 。
3. 交叉填 1: 将 I 行与 J 列交汇的所有格点置为 1。

假设 $M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (环路

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$)。 $k=1$ 时 (以节点 1 为跳板):

- 定列: 第 1 列为 1 的行是 {4}。
- 定行: 第 1 行为 1 的列是 {2}。
- 交叉填 1: (4, 2) 置 1。

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \mathbf{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

第 1 步扫描线与新元素

逻辑: 因为 $4 \rightarrow 1$ 且 $1 \rightarrow 2$, 新产生路径 $4 \rightarrow 2$ 。

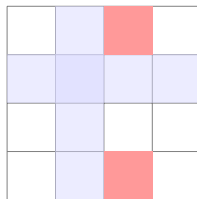
$k=2$ 时 (以节点 2 为跳板):

- 定列: 第 2 列为 1 的行是 $\{1, 4\}$ 。
- 定行: 第 2 行为 1 的列是 $\{3\}$ 。
- 交叉填 1: $(1, 3)$ 和 $(4, 3)$ 置 1。

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵累积现象:

注意 $(4, 3)$ 是利用了上一步产生的 $(4, 2)$ 得到的! 这体现了算法的连通性传递。



节点 2 作为“中继”补全路径

$k=3$ 时 (以节点 3 为跳板):

- 定列: 第 3 列为 1 的行是 $\{1, 2, 4\}$ 。
- 定行: 第 3 行为 1 的列是 $\{4\}$ 。
- 交叉填 1: $(1, 4), (2, 4), (4, 4)$ 置 1。

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

此时节点 4 已经实现了对全图的“回馈”准备。



k=4 时:最后利用节点 4 作为中继点,由于此时第 4 列全为 1,第 4 行也全为 1。根据十字规则:

$$\mathbf{M}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

最终结果:传递闭包 $t(R)$ 包含所有的序偶。这意味着在一个强连通图中,通过有限步演化,任意点均可到达任意点。

为什么不直接遍历图？

在处理海量节点时，矩阵运算具有碾压优势：

- **缓存友好**: 矩阵在内存中连续排列，大幅减少 CPU 的 Cache Miss。
- **SIMD 加速**: 现代 CPU (AVX-512) 可一次性处理 512 位的布尔运算。
- **并行爆发**: 闭包计算可映射为矩阵块并行，速度提升千倍。

性能天平

千万级节点下：

- **指针跳转**: 随机访问开销巨大。
- **布尔矩阵**: 利用硬件位运算极致加速。

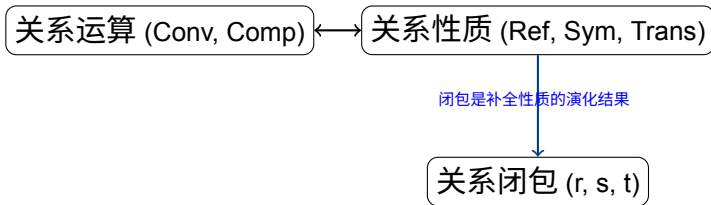
综合实战：从题目录到底层

PART 5

运算	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R^{-1}	✓	✓	✓	✓	✓
$R_1 \cap R_2$	✓	✓	✓	✓	✓
$R_1 \cup R_2$	✓	✓	✓	✗	✗
$R_1 - R_2$	✗	✓	✓	✓	✗
$R_1 \circ R_2$	✓	✗	✗	✗	✗

注意陷阱

核弹级反例: 设 $R_1 = \{\langle 1, 2 \rangle\}$, $R_2 = \{\langle 2, 3 \rangle\}$ 。它们都具有传递性, 但 $R_1 \cup R_2 = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$ **不具有** 传递性 (缺少 $\langle 1, 3 \rangle$)。这解释了为什么表中的并集项为 ✗。





题:全方位分析

已知 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle\}$ 。

- 1. 求 R^2 。
- 2. 判断 R 是否是对称的?
- 3. 求 R 的传递闭包 $t(R)$ 。

解析步解:

- 1. R^2 : $\{\langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle\}$ 。
- 2. 对称性: 非对称。因为 $\langle 1, 2 \rangle \in R$ 但 $\langle 2, 1 \rangle \notin R$ 。
- 3. 传递闭包 $t(R)$:

$$t(R) = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 1, 4 \rangle\}$$

洞察:传递闭包本质上是寻找图中节点间的所有连通路径(一步及多步可达)。

下节预告

4-3 等价关系与偏序关系

从泛泛的关系,步入分类与排序的高阶微观世界。