

4-3 等价关系与偏序关系

第四章：二元关系

张振



厦门大学嘉庚学院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

- 1 等价关系
- 2 偏序关系
- 3 本节小结与索引

等价关系

PART 1

定义: 设 $\pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ 是 A 的子集族, 若满足:

- 非空性: $S_i \neq \emptyset$
- 不重叠: $S_i \cap S_j = \emptyset \quad (i \neq j)$
- 不遗漏: $\bigcup_{i=1}^k S_i = A$

则称 π 为 A 的一个划分, 每个 S_i 称为一个划分块。

Metaphor View

切蛋糕: 每一块都是独立的 (不重叠), 且拼在一起正好是整块蛋糕 (不遗漏)。

题:划分判定演练

设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 判定以下集合族是否为 A 的划分:

- 1. $\pi_1 = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}$
- 2. $\pi_2 = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}\}$
- 3. $\pi_3 = \{\{1, 2\}, \{2, 3, 4\}, \{5, 6\}\}$

判定结果:

- π_1 : ✓ (满足非空、不重叠、不遗漏)。
- π_2 : ✗ (遗漏了元素 6)。
- π_3 : ✗ (元素 2 在两个块中重叠了)。

定义:若关系 R 满足以下三个性质,则称 R 为 A 上的**等价关系**:

- **自反性** (Reflexive): $\forall x \in A, \langle x, x \rangle \in R$
- **对称性** (Symmetric): $\langle x, y \rangle \in R \implies \langle y, x \rangle \in R$
- **传递性** (Transitive): $\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \implies \langle x, z \rangle \in R$

记法:常记作 $x \sim y$ 或 $x \equiv y \pmod{R}$ 表示 $\langle x, y \rangle \in R$ 。范例:几何学中的“全等”、数论中的“模 n 同余”。

题:等价关系判定

- 设 $A = \mathbb{Z}$ (整数集), 定义关系 $R: \langle x, y \rangle \in R \iff x + y$ 是偶数。
判定 R 是否为等价关系。

判定步骤:

- 自反: $x + x = 2x$ 必为偶数, 满足。
- 对称: $x + y$ 为偶数 $\implies y + x$ 必为偶数, 满足。
- 传递: 若 $x + y, y + z$ 为偶, 则 $(x + y) + (y + z) = x + 2y + z$ 为偶, 从而 $x + z = (x + 2y + z) - 2y$ 必为偶, 满足。

结论: R 是等价关系。

设 R 是 A 上的等价关系, $x \in A$ 的等价类定义为:

$$[x]_R = \{y \in A \mid x \sim y\}$$

此时称 x 为该等价类的**代表元** (Representative)。

思考:化繁为简

等价类就是所有和 x “具有相同特征”的元素凑在一起形成的团体。

设 R 是 A 上的等价关系, 对于任意 $x, y \in A$, 具有以下性质:

1. **非空性:** $[x]_R \neq \emptyset$ (因为自反性 $x \in [x]_R$)。
2. **等价判定:** $[x]_R = [y]_R \iff \langle x, y \rangle \in R$ 。
3. **不相交性:** $[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset \implies [x]_R = [y]_R$ 。
· 推论: 两个等价类要么完全相等, 要么互不相交。
4. **覆盖性:** $\bigcup_{x \in A} [x]_R = A$ 。

核心洞察: 这四条性质完美契合了“集合划分”的定义, 这正是划分定理的数学根源。

题:提取等价类

- 设 $A = \{\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa\}$ (ϵ 为空串)。
关系 R 定义为“字符串长度相等”,求 $[a]_R$ 和 $[aa]_R$ 。



计算结果:

- $[a]_R = \{y \in A \mid |y| = 1\} = \{a, b\}$
- $[aa]_R = \{y \in A \mid |y| = 2\} = \{aa, ab, ba, bb\}$

由所有不同的等价类作为元素组成的集合,称为 A 关于 R 的**商集** (Quotient Set):

$$A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}$$

核心理解:

商集是一个“集合的集合”。它把原集合中散落的个体,按等价关系打包成了几个大包裹。



题:提取商集

■ 设文件集 $A = \{\text{main.c}, \text{util.c}, \text{base.h}, \text{test.h}, \text{readme.txt}\}$ 。
定义关系 $R: \langle x, y \rangle \in R \iff x, y$ 具有相同后缀名。
请写出商集 A/R 。



第一步:提取等价类

- $[main.c] = \{main.c, util.c\}$
- $[base.h] = \{base.h, test.h\}$
- $[readme.txt] = \{readme.txt\}$

第二步:组合商集

$$A/R = \{\{main.c, util.c\}, \{base.h, test.h\}, \{readme.txt\}\}$$



题:实战演练

一个微服务系统 $S = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ 被划分为两个独立部署组:
 $\pi = \{\{M_1, M_2\}, \{M_3, M_4\}\}$ 。
写出由该划分导出的等价关系 R_π , 并解释其工程意义。



关系构造:

- $R_{\pi} = \{\langle M_i, M_j \rangle \mid M_i, M_j \text{ 在同一组}\} \cup I_S$
- $R_{\pi} = \{\langle M_1, M_2 \rangle, \langle M_2, M_1 \rangle, \langle M_3, M_4 \rangle, \langle M_4, M_3 \rangle, \dots\}$

工程意义:定义了系统内“逻辑耦合”的边界,组内元素等价,组间物理隔离。

偏序关系

PART 2

若关系 R 满足以下性质, 称其为**偏序关系** (记作 $\leq$):

- **自反性** (Reflexive)
- **反对称性** (Antisymmetric)
- **传递性** (Transitive)

拥有偏序关系的集合称为**偏序集** (Poset), 记为 $\langle A, \leq \rangle$ 。

注意辨析

等价关系 $\implies$ **分类**

偏序关系 $\implies$ **排位**

反对称性保证了“序”的单向性, 禁止了非平凡的循环。



题: 证明偏序关系

- 设 S 是任意集合, $\mathcal{P}(S)$ 是 S 的幂集。
证明: 包含关系 $\subseteq$ 是 $\mathcal{P}(S)$ 上的一个偏序关系。

证明:任取 $A, B, C \in \mathcal{P}(S)$, 即 $A, B, C \subseteq S$:

- **自反性:**由集合包含定义,显然有 $A \subseteq A$ 。满足。
- **反对称性:**若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$,由集合相等的定义可知 $A = B$ 。满足。
- **传递性:**若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$,则 A 中的元素必在 B 中,从而必在 C 中,即 $A \subseteq C$ 。满足。

结论: $\langle \mathcal{P}(S), \subseteq \rangle$ 是一个偏序集。

1. **任务依赖 (Task Dependency)**: 项目中任务 A 必须在 B 之前完成, 构成偏序 (有些任务可并行, 不可比)。
2. **版本控制 (Git Commit)**: 提交记录的历史回溯关系构成偏序 (分支上的提交可能不可比)。
3. **语义版本号 (SemVer)**: 比较版本号 'v1.2.0' 与 'v1.1.5' 的字典序关系。

深度思考: 为什么工程项目中的“循环依赖”会导致偏序关系失效?

答: 因为循环依赖违反了**反对称性**, 使得“序”变得模糊 (A 在 B 前且 B 在 A 前 $\implies A = B$, 但在工程中它们是不同任务)。

题:矩阵判定法

设 $A = \{a, b, c\}$, 判定以下关系矩阵是否表示偏序关系:

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

三性全审计:

- 自反性: 主对角线全为 1, 满足。
- 反对称性: 除主对角线外, 没有对称的 1 ($m_{12} = 1$ 但 $m_{21} = 0$), 满足。
- 传递性: $\langle a, b \rangle \in R$ ($m_{12} = 1$) 且 $\langle b, c \rangle \in R$ ($m_{23} = 1$), 但 $\langle a, c \rangle \notin R$ (因为 $m_{13} = 0$), 违反传递性。

结论: 该矩阵 **不表示偏序关系**。

如果在偏序集 $\langle A, \leq \rangle$ 中, $\forall x, y \in A$, 都有 $x \leq y$ 或 $y \leq x$ (即任意两元素皆可比)。

■ **定义:** 满足上述条件的关系称为**全序关系** (或线性序)。

■ **对比案例:**

- $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$: 是全序 (任意两数都能比大小)。
- $\langle \mathbb{Z}^+, | \rangle$: **非全序** (如 2 和 3 不可比, 谁也不整除谁)。

■ **链 (Chain):** 偏序集的一个全序子集。

定义: 设 $\langle A, \leq \rangle$ 是偏序集, 若 $x, y \in A$ 且满足:

1. $x < y$ (即 $x \leq y$ 且 $x \neq y$)
2. 不存在 $z \in A$ 使得 $x < z < y$

则称 y **盖住** (Cover) x , 记作 $x \lessdot y$ 。

直观理解:

y 是 x 在偏序意义下的“紧邻后继”。在 Hasse 图中, $x \lessdot y$ 对应着一条直接相连的边。



题: 整除关系中的盖住判定

设 $A = \{1, 2, 4, 8, 12\}$, 关系为整除关系 $|$ 。判定:

- 1. 2 是否盖住 1?
- 2. 4 是否盖住 1?
- 3. 12 是否盖住 4?



判定结果:

- 1. 是。 $1 < 2$ 且中间没有其他整除元素。
- 2. 否。虽然 $1 < 4$, 但存在 $z = 2$ 使得 $1 < 2 < 4$ 。
- 3. 是。 $4 \mid 12$ 且集合内没有 z 满足 $4 \mid z \mid 12$ 。

痛点:原始关系图充满了自环(自反性)和长距离的连线(传递性),结构极其混乱。

哈斯图的设计哲学:

1. **默认自反:**不再画自环。
2. **默认传递:**不再画间接边。
3. **高度代表顺序:**不再画箭头。

思考:极简主义

哈斯图是偏序关系的“骨架”。它通过剥离冗余信息,直观展现了集合的层级结构。

第一步:画出原始关系图 G_R

- 将 A 的每个元素作为一个节点。
- 若 $\langle x, y \rangle \in R$, 画一条从 x 到 y 的箭头。

此时的图充斥着自环和传递边,显得非常凌乱。

第二步:利用自反性去噪声

- **操作:**删除图中所有的自环 $\langle x, x \rangle$ 。
- **原理:**偏序关系强制要求自反,这些自环不携带任何区分性的结构信息。



第三步:利用传递性去冗余

- **操作:**如果已经有 $x \rightarrow y$ 和 $y \rightarrow z$, 则删除多余的 $x \rightarrow z$ 。
- **原理:**保留“最近邻”的紧致关系,长距离关系通过传递性自动推导。



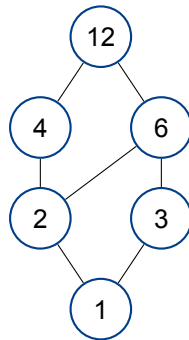
第四步:垂直重构与箭头移除

- **操作:**将“后继子”置于“前驱者”之上,并将有向箭头改为无向连线。
- **原理:**高度代表了顺序,方向是隐含的。

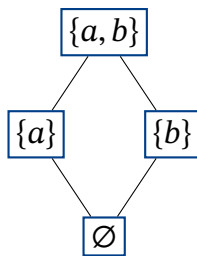
最终结果:一幅极其精简、充满层级美感的结构图。

设 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, 关系为整除。

- 层级 0 (最底层): 1 (整除所有人)
- 层级 1: 2, 3
- 层级 2: 4, 6
- 层级 3 (最高层): 12



设 $A = \{a, b\}$, 其幂集
 $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ 。关系为 $\subseteq$ 。





题:层级分析实战

- 设 $A = \{2, 3, 6, 12, 24, 36\}$, 关系 R 为整除关系 $|$ 。
请判断谁是最底层的元素? 谁是最高层的元素?

层级化剥离结果:

- 第一层(底层):2, 3 (没有任何数能整除它们)。
- 第二层:6 (被 2 和 3 整除)。
- 第三层:12 (被 6 整除)。
- 第四层(顶层):24, 36 (被 12 整除,互不整除)。

思考:视觉直观

在哈斯图中,底层就是“极小元”,顶层就是“极大元”。

设 $\langle A, \leq \rangle$ 是偏序集, $B \subseteq A, b \in B$:

- **最大元 (Greatest):** $\forall x(x \in B \rightarrow x \leq b)$ 。
- **最小元 (Least):** $\forall x(x \in B \rightarrow b \leq x)$ 。
- **极大元 (Maximal):** $\neg \exists x(x \in B \wedge b < x)$ 。
- **极小元 (Minimal):** $\neg \exists x(x \in B \wedge x < b)$ 。



逻辑读法指南

$\neg \exists x(x \in B \wedge b < x)$ 可读作:

1. **严谨层**: 不存在属于 B 的元素 x 使得 $b < x$ 。
2. **直观层**: 在 B 中找不到比 b 更大的元素。
3. **口语层**: “在组内, 没人能超过我”。

思考: 逻辑之美

否定存在命题 ($\neg \exists$) 在离散数学中常用来刻画“最边际”的状态。

直观辨析:

- **最值**是“傲视群雄”:
必须能和所有人比,且全胜/全败。
- **极值**是“独善其身”:
不一定能和所有人比,但没人能超过/低于它。

选拔比喻

最值 $\implies$ **武林盟主** (打败所有人)。

极大元 $\implies$ **世外高人** (没人能打败他,但他可能没和所有人交过手)。

重要数学定理与性质:

1. 存在性差异:

- **极值**: 任何非空的有限偏序集, 必定存在极大元和极小元。
- **最值**: **不一定存在** (即便在有限集中, 若存在多个互不相等的极大元, 则无最大元)。

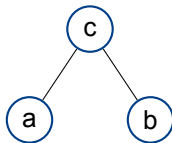
2. 全序集的特殊性: 在有限全序集中, 最大元和最小元必定存在且唯一。

3. 包含关系: 最大元必是极大元。若集合存在最大元, 则它也是唯一的极大元。

4. 唯一性: 最值若存在必唯一; 极值可以有多个。

思考: 结构洞察

全序集将偏序集的“网状”结构拉直成了“链状”, 消除了不可比性, 从而保证了全局最优解的存在。



题:提取极值

对于上图所示的偏序集 $\langle A, \leq \rangle$, 其中 $A = \{a, b, c\}$, 请找出所有的极值与最值元素。

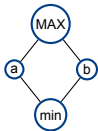
分析结果:

- 极大元: c 最大元: c
- 极小元: a, b 最小元: 不存在

注意:易错点

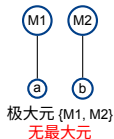
因为 a, b 不可比,所以没有元素能比 a, b 都小,故无全局最小元。

Case 1: 唯一顶峰



有最大元 $\implies$ 唯一极大元

Case 2: 双峰并立



极大元 $\{M1, M2\}$

无最大元

Case 3: 离散孤岛

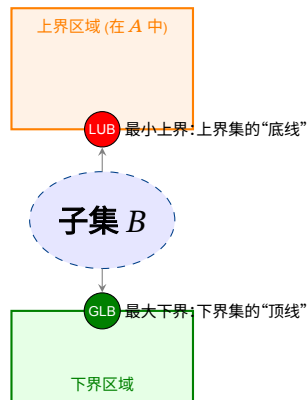


所有人既是极大也是极小

无最值

核心区别:极值必须在子集 B **内部**寻找,界限可以在全局 A **中**寻找。设 $\langle A, \leq \rangle$ 为偏序集, $B \subseteq A$:

- **上界 (Upper Bound):** 若存在 $a \in A$, 使得 $\forall x \in B$ 均有 $x \leq a$, 则称 a 为 B 的上界。
- **最小上界 (LUB / Sup):** 上界集合中的**最小元**。
- **下界 (Lower Bound):** 若存在 $a \in A$, 使得 $\forall x \in B$ 均有 $a \leq x$, 则称 a 为 B 的下界。
- **最大下界 (GLB / Inf):** 下界集合中的**最大元**。



思考: 选拔比喻

最值是选“班长”:

必须在 B 内部, 且能镇住所有人。

确界是选“裁判”:

可以在 B 外部。

LUB 是离 B 最近的那个“天花板”。

题:整除关系中的界限分析

- 在整除图 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 中,取子集 $B = \{2, 3\}$ 。
请写出 B 的上界集、LUB、下界集及 GLB。



计算结果:

- 上界集: $\{6, 12\}$ (都能被 2 且被 3 整除)。
- 最小上界 (LUB): 6。
- 下界集: $\{1\}$ 。
- 最大下界 (GLB): 1。

背景:多维数据的排序(如姓名、版本号)。设 $\langle A, \leq_A \rangle$ 和 $\langle B, \leq_B \rangle$ 是偏序集,定义 $A \times B$ 上的辞书序:

$$\langle a_1, b_1 \rangle \leq \langle a_2, b_2 \rangle \iff (a_1 <_A a_2) \vee (a_1 = a_2 \wedge b_1 \leq_B b_2)$$

案例:版本号 '2.3.1' 比 '2.3.0' 大,因为前两个维度一样,比较第三个维度。

题:版本号与字典序

- 给定以下软件版本号集合,请按辞书序从小到大排列:
 $V = \{v2.0.1, v1.9.5, v2.1.0, v2.0.0\}$

排序步骤:

- 第一维比较: $1 < 2 \implies v1.9.5$ 最小。
- 第二维比较: $0 < 1 \implies v2.1.0$ 最大。
- 第三维比较: $0 < 1 \implies v2.0.0 < v2.0.1$ 。

最终序列:

$$v1.9.5 < v2.0.0 < v2.0.1 < v2.1.0$$

- 等价关系 $\iff$ 集合划分。
 - 关键点: 商集提取, 划分定理。
- 偏序关系 $\iff$ 结构层级。
 - 关键点: 反对称性, 哈斯图算法, 极值与界分析。
- 复习指南:
 1. 掌握“三性”判定。
 2. 熟练画出任意有限集的哈斯图。
 3. 准确区别最大元与极大元, 上界与最小上界。

THANK YOU

下节课:第四章综合习题实践课