

4-4 第四章综合习题实践课

二元关系： 期末高频考点冲刺

张振



厦门大学嘉庚学院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

- 1 考点一:关系的五大性质审计
- 2 考点二:闭包运算与 Warshall 算法
- 3 考点三:等价关系与商集
- 4 考点四:哈斯图与极值/界限判定
- 5 冲刺指南:避坑手册

关系的五大性质审计

PART 1

题: 矩阵审计

设 $A = \{a, b, c\}$, 集合上的关系 R 的矩阵为:

$$\mathbf{M}_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

判定 R 是否具有: 自反、反自反、对称、反对称、传递性。

审计清单:

- 自反性: 主对角线全为 1 $\implies$ 具有。
- 反自反性: 主对角线不全为 0 $\implies$ 不具有。
- 对称性: 矩阵对称 ($\mathbf{M}_R = \mathbf{M}_R^T$) $\implies$ 具有。
- 反对称性: 存在 $m_{13} = 1, m_{31} = 1$ 但 $1 \neq 3 \implies$ 不具有。
- 传递性: $m_{13} = 1, m_{31} = 1 \implies m_{11} = 1$ (满足); 需全量检查。本题中 $R = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle a, c \rangle, \langle c, a \rangle\}$, 因 $\langle a, c \rangle, \langle c, a \rangle \in R \implies \langle a, a \rangle \in R$ 成立 $\implies$ 具有。

闭包运算与 Warshall 算法

PART 2

题:传递闭包计算

使用 Warshall 算法求关系 R 的传递闭包 $t(R)$, 已知其矩阵为:

$$\mathbf{M}_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Step 1 ($k = 1$): 观察第 1 列 ($m_{21} = 1$) 和第 1 行 ($m_{12} = 1$)

更新 $m_{22} = m_{22} \vee (m_{21} \wedge m_{12}) = 1$ 。 **Step 2** ($k = 2$): 观察第 2 列

($m_{12} = 1, m_{22} = 1$) 和第 2 行 ($m_{21} = 1, m_{22} = 1$)

更新 $m_{11} = m_{11} \vee (m_{12} \wedge m_{21}) = 1$ 。 **Step 3** ($k = 3$): 观察第 3 列和行,无新增。最

终矩阵:

$$\mathbf{M}_{t(R)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

等价关系与商集

PART 3

题: 商集提取

设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, R 是 A 上的模 3 同余关系, 即:

$$\langle x, y \rangle \in R \iff x \equiv y \pmod{3}$$

写出等价类 $[1]_R, [2]_R, [3]_R$ 及商集 A/R 。

等价类划分:

- $[1]_R = \{x \in A \mid x \equiv 1 \pmod{3}\} = \{1, 4\}$
- $[2]_R = \{x \in A \mid x \equiv 2 \pmod{3}\} = \{2, 5\}$
- $[3]_R = \{x \in A \mid x \equiv 0 \pmod{3}\} = \{3, 6\}$

商集结果:

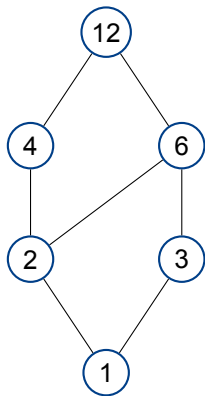
$$A/R = \{\{1, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 6\}\}$$

思考: 划分定理

商集中的元素构成了集合 A 的一个划分。

哈斯图与极值/界限判定

PART 4



题: 极值与界限全搜索

设偏序集 $\langle A, | \rangle$ 的哈斯图如左图。取子集 $B = \{2, 3, 4\}$ 。求：

1. B 的极大元、极小元、最大元、最小元。
2. B 的上界、下界、LUB、GLB。

1. 内部极值分析 (针对 $B = \{2, 3, 4\}$):

- 极大元: B 中没有元素比它们大 $\implies 3, 4$ 。
- 极小元: B 中没有元素比它们小 $\implies 2, 3$ 。
- 最大元: B 中唯一的“顶峰” $\implies$ 不存在 (3 和 4 不可比)。
- 最小元: B 中唯一的“谷底” $\implies$ 不存在 (2 和 3 不可比)。



2. 外部界限分析 (在 A 中找):

- 上界集: 比 B 中所有元素都大的元素 $\implies \{12\}$ (注: 6 不是 4 的上界)。
- 最小上界 (LUB): 上界集中的最小元 $\implies 12$ 。
- 下界集: 比 B 中所有元素都小的元素 $\implies \{1\}$ 。
- 最大下界 (GLB): 下界集中的最大元 $\implies 1$ 。

注意:常见丢分点

- **反对称性**:记得 $\langle x, y \rangle$ 和 $\langle y, x \rangle$ 同时存在时必须 $x = y$ 。空关系是反对称的!
- **Warshall 步进**:每一层 k 都要在上一层的基础上更新,不要跳步。
- **最大元 vs 极大元**:极大元可以有多个,最大元必须能“镇住”所有人。
- **确界存在性**:LUB/GLB 不一定在子集 B 中。

考试顺利！

祝各位同学在第四章题目中全对拿满分。