

5-1图的基本概念

第五章：图论·联结的拓扑

张 振



厦门大学嘉庚学院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

- 1 历史溯源:从现实到抽象的飞跃
- 2 图的数学定义
- 3 顶点的度与握手定理
- 4 特殊图与图的同构
- 5 子图与补图
- 6 应用与复盘

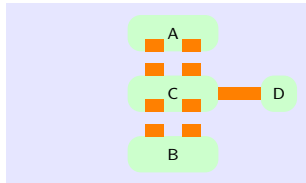
图论的诞生：剥离几何，回归联结

PART 1

历史背景: 18 世纪的哥尼斯堡(现俄罗斯加里宁格勒), 普雷格尔河环绕着两个小岛, 河上架有 7 座桥。

题:古老的市民挑战

从任一地点出发, 能否在**不重复**经过任何一座桥的前提下, 走遍这七座桥, 并回到起点?

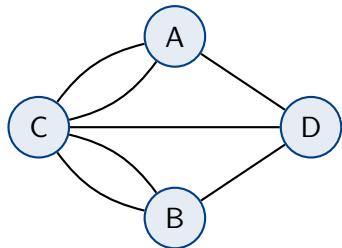


1736 年前的哥尼斯堡桥梁分布图

思考: 如果你是当时的市民, 你会如何尝试?

建模逻辑:

- 顶点 (Vertices): 陆地块 $\rightarrow$ 抽象为点。
- 边 (Edges): 桥梁 $\rightarrow$ 抽象为线。
- 拓扑不变性: 欧拉意识到,问题的解与桥的长度、陆地的形状无关,仅取决于“连接关系”。



七桥问题的图论模型

Philosophy Box: 问题的转化

“走遍七座桥” $\Rightarrow$ 在图 G 中寻找一条经过每条边恰好一次的通路 (一笔画问题)。

留下问题: 观察图中各顶点的度数 ($A: 3, B: 3, C: 5, D: 3$), 为什么这种奇度点的组合会导致“一笔画”失败? 我们在本章末尾揭晓答案。

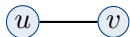
代数结构的精密表述

PART 2

定义:无序对与无序积

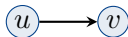
- **无序对**: 由两个元素 u, v 组成的集合 $\{u, v\}$, 简记为 (u, v) , 满足 $(u, v) = (v, u)$ 。
- **无序积** $A \& B$: 所有无序对 (u, v) 构成的集合, 其中 $u \in A, v \in B$ 。

无序积 $V \& V$ (无向边)



$$(u, v) = (v, u)$$

笛卡尔积 $V \times V$ (有向边)



$$\langle u, v \rangle \neq \langle v, u \rangle$$

定义 5.1 (无向图)

无向图是一个序偶 $G = \langle V, E \rangle$, 其中:

- V : 顶点集 (Vertex set), 非空有穷集。
- E : 边集 (Edge set), $V \times V$ 的**多重子集**(元素允许重复)。

定义 5.2 (有向图)

有向图是一个序偶 $D = \langle V, E \rangle$, 其中:

- V : 顶点集。
- E : 边集, $V \times V$ 的**多重子集**。其元素为有向边 $\langle u, v \rangle$ 。

Philosophy Box: 基图 (Base Graph)

用无向边代替有向图 D 的所有有向边, 得到的无向图称为 D 的基图。

题:图形转换

设 $G = \langle V, E \rangle$, 其中:

- $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

- $E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_3), (v_1, v_4)\}$

试绘制该图,并指出哪些是平行边,哪些是环?

题:图形转换

设 $G = \langle V, E \rangle$, 其中:

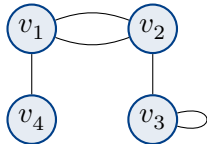
- $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

- $E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_3), (v_1, v_4)\}$

试绘制该图,并指出哪些是平行边,哪些是环?

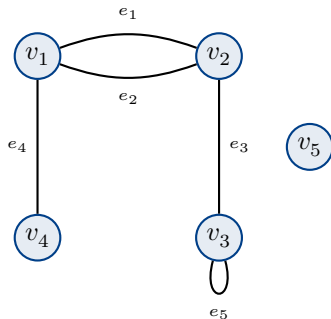
解析要点:

- (v_1, v_2) 出现 2 次 $\rightarrow$ **重数为 2 的平行边**。
- (v_3, v_3) 始末点相同 $\rightarrow$ **自环**。
- v_4 只有一条关联边。



核心术语可视化:

- **关联:** 边 e_1 与 v_1, v_2 关联。
- **相邻:** v_1 与 v_2 相邻。
- **环 (Loop):** 边 e_5 始末点相同。
- **孤立点:** v_5 度数为 0。
- **悬挂点/边:** v_4 度数为 1, e_4 为悬挂边。



注意: e_1, e_2 是平行边; v_5 是孤立点。

度数平衡：图论的第一基本定理

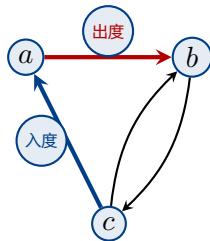
PART 3

无向图:

- 度数 $d(v)$: v 作为端点的次数之和(环计 2 次)。
- 最大度 $\Delta(G)$, 最小度 $\delta(G)$ 。

有向图:

- 入度 $d^-(v)$: $\rightarrow v$ 。
- 出度 $d^+(v)$: $v \rightarrow$ 。
- $d(v) = d^+(v) + d^-(v)$ 。



例: $d^+(a) = 1, d^-(a) = 1, d(a) = 2$

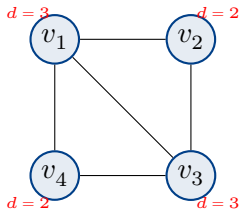
Philosophy Box: 流量平衡

每一条有向边都贡献了 1 个出度和 1 个入度。

定理陈述

任何图(无向或有向)中,所有顶点的度数之和等于边数的 2 倍:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$



视觉验证:

- 边数 $|E| = 5 \implies 2|E| = 10$ 。
- 度数和: $3 + 3 + 2 + 2 = 10$ 。
- 结论成立。

题:图的边数推算

某简单图 G 有 10 个顶点, 其中 4 个顶点的度数为 3, 其余顶点的度数均为 4。问 G 有多少条边?

题:图的边数推算

某简单图 G 有 10 个顶点, 其中 4 个顶点的度数为 3, 其余顶点的度数均为 4。问 G 有多少条边?

解题思路:

1. 计算总度数 $\sum d(v)$:

$$4 \times 3 + (10 - 4) \times 4 = 12 + 24 = 36$$

2. 根据握手定理 $2m = \sum d(v)$:

$$2m = 36 \implies m = 18$$

3. 结论:该图有 18 条边。

■ 题:逻辑证明

证明:不存在一个多面体,其面数是奇数,且每个面都有奇数条棱。

■ 题:逻辑证明

证明:不存在一个多面体,其面数是奇数,且每个面都有奇数条棱。

证明提示 (对偶思想):

- 将每个“面”看作图的一个“顶点”。
- 如果两个面相邻,则在对应的顶点间连一条边。
- “每个面有奇数条棱”对应“每个顶点的度数是奇数”。
- “面数是奇数”对应“顶点数是奇数”。
- **矛盾点:**这违反了握手定理的推论——奇度顶点的个数必为偶数。

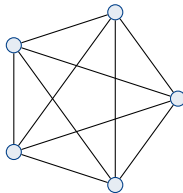
结构的分类与等价判定

PART 4

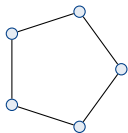
简单图 (Simple Graph): 无环、无平行边的图(极其重要)。

完全图 (Complete Graph) K_n : 任意两个顶点均相邻的 n 阶简单图。

- 边数 $m = \frac{n(n-1)}{2}$ 。
- 每个顶点的度数均为 $n - 1$ 。



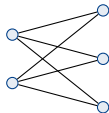
五阶完全图 K_5



圈图 C_5



通路图 P_4



完全二部图 $K_{2,3}$

■ 题:完全图的边数

在一个 n 阶无向完全图 K_n 中,总边数为 45 条,求 n 的值。

■ 题:完全图的边数

在一个 n 阶无向完全图 K_n 中,总边数为 45 条,求 n 的值。

解析:

- 公式: $m = \frac{n(n-1)}{2}$
- 代入: $45 = \frac{n(n-1)}{2} \implies n(n-1) = 90$
- 求解: $90 = 10 \times 9$, 故 $n = 10$ 。

定义 5.3 (图的同构)

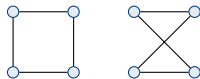
设 $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$, $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ 为两个图。若存在双射函数 $f: V_1 \rightarrow V_2$, 使得:

1. $(v_i, v_j) \in E_1 \iff (f(v_i), f(v_j)) \in E_2$ (有向图同理);
2. 且 (v_i, v_j) 与 $(f(v_i), f(v_j))$ 的重数相同;

则称 G_1 与 G_2 是同构的, 记作 $G_1 \cong G_2$ 。

注意: 判定同构的必要条件 (非充分)

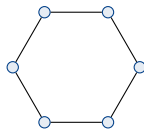
- 顶点数相同、边数相同。
- 度数列相同。
- 对应的邻域结构、回路结构相同。



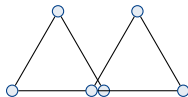
同构: 只是“画法”不同。

题:判定题

判断下列两图是否同构? 并说明理由。



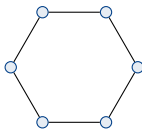
G_1



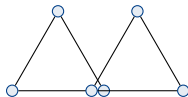
G_2

题: 判定题

判断下列两图是否同构? 并说明理由。



G_1



G_2

解析:

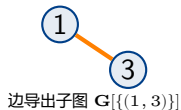
- 检查必要条件: 两者均为 6 阶 6 边, 度数列均为 $(2, 2, 2, 2, 2, 2)$ 。
- 检查结构: G_1 是连通的 (一个大环), 而 G_2 不连通 (两个小环)。
- 结论: **不同构**。必要条件相同并不保证同构。

图的衍生与 “对立面”

PART 5

分类规范:

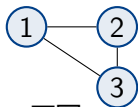
- **真子图:** $G' \subseteq G$ 且 $G' \neq G$ 。
- **生成子图:** $V' = V$ (保留全点)。
- **点导出子图 $G[V']$:** 只要端点在 V' 内,原图中的边必须全数保留。
- **边导出子图 $G[E']$:** 仅保留指定的边及其关联点。



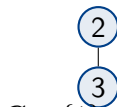
1. 顶点的删除 (Vertex Deletion)

设 $V' \subseteq V$, 从 G 中删除 V' 中所有顶点及其所有关联边。

$$G - V' = G[V - V']$$



原图 G



$G - \{1\}$

2. 边的删除 (Edge Deletion)

设 $E' \subseteq E$, 从 G 中删除 E' 中所有边, 但保留所有顶点。

$$G - E' = \langle V, E - E' \rangle$$

题:核心差异思考

- 为什么删点必须删边, 而删边不需要删点?

提示: 图的定义要求边必须关联在现有的顶点上。

定义:

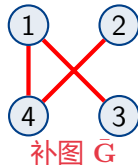
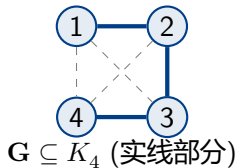
$\bar{G}$ 的边集 $\bar{E}$ 满足:

$$E \cup \bar{E} = E(K_n)$$

且 $E \cap \bar{E} = \emptyset$ 。

Philosophy Box: 自补图性质

若 $G \cong \bar{G}$, 则其边数 $m = \frac{n(n-1)}{4}$ 。



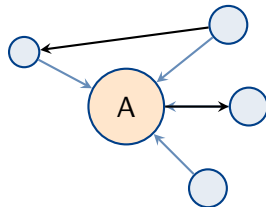
例: P_4 是自补图。

从理论回到现实网络

PART 6

在 Google 的 PageRank 算法中,互联网被建模为巨型有向图:

- **网页** = 顶点; **超链接** = 有向边。
- **基本哲学**: 被高质量网页链接(入度贡献)越多的页面,其权重越高。



PageRank 思想:

节点 A 的入度最大 → **权重最高**

握手定理的现代价值

网络中“链接”的总流出量必须等于总流入量(定理 5.1)。PageRank 通过迭代平摊这些流量来计算每个顶点的“地位值”。

题:判定题

- 是否存在一个包含 5 个顶点的无向简单图, 其各顶点的度数分别为 1, 2, 2, 3, 4?

题:判定题

是否存在一个包含 5 个顶点的无向简单图, 其各顶点的度数分别为 1, 2, 2, 3, 4?

解析:

1. 总度数: $1 + 2 + 2 + 3 + 4 = 12$ (偶数, 符合握手定理)。
2. 奇度点个数: 1, 3 (共 2 个, 为偶数, 符合推论)。
3. 简单图校验: 最大度为 4, 而 $n = 5$, 每个点最多连 $n - 1 = 4$ 条边, 符合。
4. 结论: 存在。

下节预告

5-2 通路、回路与连通性