

5-2 通路、回路与图的连通性

第五章：图论 · 结构属性与矩阵表示

张 振



厦门大学嘉庚学院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

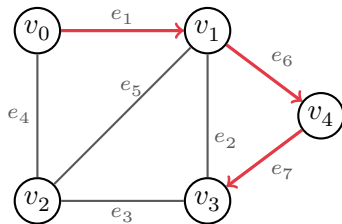
- 1 通路 & 回路
- 2 图的连通性
- 3 图的矩阵表示

通路、回路的定义与分类

PART 1

- **通路 (Walk):** 顶点与边的交替序列
 $\Gamma = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_l v_l$
- **回路 (Closed Walk):** 满足 $v_0 = v_l$ 的通路。
- **长度 (l):** 通路中包含的边数。

核心属性: 研究通路的本质是研究**边**和**顶点**的**重复性**。根据是否重复,可对路径进行分类。



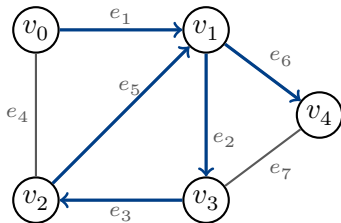
长度为 3 的通路: $v_0 e_1 v_1 e_6 v_4 e_7 v_3$

■ 简单通路 (Trail):

$$\forall i \neq j \Rightarrow e_i \neq e_j$$

(边互不相同, 但顶点可以重复经过)。

- ## ■ 简单回路 (Tour):
- 起点等于终点的 Trail。
(也被称为“迹”, 著名的欧拉回路即属此类)。



简单通路: $v_0 e_1 v_1 e_2 v_3 e_3 v_2 e_5 v_1 e_6 v_4$
(边无重复, 但顶点 v_1 出现两次)

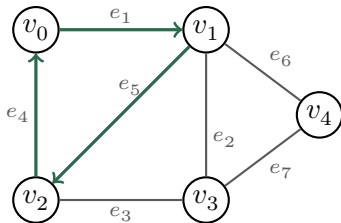
■ 初级通路 (Path/路径):

$$\forall i \neq j \Rightarrow v_i \neq v_j$$

(顶点互不相同, 最纯粹的路径, 自然边也不重复)。

■ 初级回路 (Cycle/圈): 除 $v_0 = v_l$ 外, 所有顶点互不相同的回路。

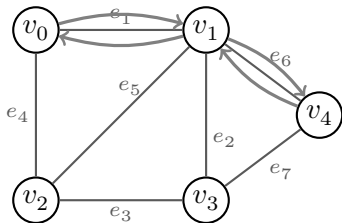
学术注记: 英文文献中常直接用 **Walk** (通路), **Trail** (迹, 简单通路), **Path** (路径, 初级通路) 进行精确区分。



初级回路 (圈): $v_0 e_1 v_1 e_5 v_2 e_4 v_0$

- **复杂通路 (Complex Walk):** 存在边被重复经过的通路 ($\exists i \neq j, e_i = e_j$)。
- **复杂回路 (Complex Circuit):** 起点等于终点, 且存在边被重复经过的通路。

化简思想: 复杂通路 (如在节点间反复折返) 通常可以通过剔除“折返”或“子圈”, 被缩减为更简单的结构。



复杂回路: $v_0 e_1 v_1 e_6 v_4 e_6 v_1 e_1 v_0$
(边 e_1 和 e_6 被反复经过)

题:序列判定

考察右图,判断下列顶点边交替序列的类型 (Walk, Trail, Path, Cycle):

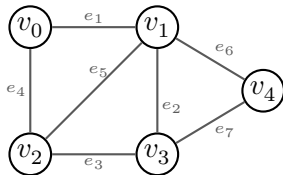
1. $\Gamma_1 =$

$$v_0 e_1 v_1 e_5 v_2 e_3 v_3 e_2 v_1 e_6 v_4$$

2. $\Gamma_2 = v_0 e_1 v_1 e_6 v_4 e_7 v_3 e_3 v_2$

3. $\Gamma_3 =$

$$v_0 e_4 v_2 e_3 v_3 e_7 v_4 e_6 v_1 e_1 v_0$$



■ Γ_1 的分析:

- 边序列 e_1, e_5, e_3, e_2, e_6 无重复 $\Rightarrow$ Trail (简单通路/迹)。
- 顶点 v_1 出现两次 $\Rightarrow$ 不是 Path。

■ Γ_2 的分析:

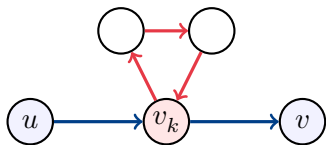
- 顶点序列 v_0, v_1, v_4, v_3, v_2 互不相同 $\Rightarrow$ Path (初级通路/路径)。
- 既然是 Path, 自然也是 Trail 和 Walk。

■ Γ_3 的分析:

- 起点等于终点 v_0 , 且除起点外顶点互不相同 $\Rightarrow$ Cycle (圈/初级回路)。

结论: Γ_1 : Trail; Γ_2 : Path; Γ_3 : Cycle

- **定理 1 (通路长度上界):** 在 n 阶图 G 中, 若 $\exists$ 从 u 到 v ($u \neq v$) 的通路, 则必存在长度 $l \leq n - 1$ 的初级通路。
- **证明逻辑 (鸽巢原理):** 若最短通路长度 $l \geq n$, 则该通路的序列包含至少 $n + 1$ 个顶点。因为图最多只有 n 个唯一顶点, 故必然存在重复顶点, 从而构成“子圈”。剔除该子圈即可得到更短的通路。

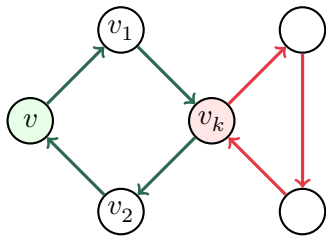


红圈: 因顶点过多必然出现的重复回路

蓝色: 剔除回路后的更短直接通路

- **定理 2 (回路长度上界):** 在 n 阶图 G 中, 若存在经过 v 的简单回路, 则必存在长度 $l \leq n$ 的初级回路(圈)。

结构推论 (Girth): 无向简单图的圈长 $l \geq 3$; 有向简单图的圈长 $l \geq 2$ 。无环意味着不存在 $l = 1$ 的圈。

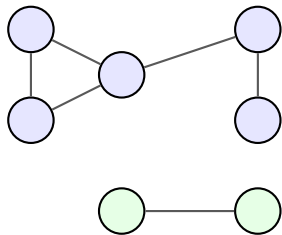


红圈: 内部包含的其他初级回路
绿圈: 剔除红圈后, 保留过 v 的初级回路

连通分支、割集与有向图连通性

PART 2

- **连通关系 $\sim$** : 定义 V 上的二元关系
 $u \sim v \iff \exists$ 从 u 到 v 的通路 (约定 $u \sim u$)。
- **等价类划分**: $\sim$ 满足自反性、对称性和传递性, 是 V 上的等价关系。
- **连通分支 $p(G)$** : 商集 $V/\sim$ 中每个等价类导出的极大连通子图。 G 是连通图
 $\iff p(G) = 1$ 。



$p(G) = 2$ (包含上下两个独立的连通分支)

在研究连通性之前,先定义图的两种基本“破坏”操作:

■ **删点** $G - V'$:

- 从图 G 中删除顶点子集 V' 。
- **必须同时删除**所有与 V' 中顶点相关联的边。

■ **删边** $G - E'$:

- 从图 G 中仅删除边子集 E' 。
- 原有的顶点**全部保留**。

点割集定义:若 $V' \subset V$ 满足以下条件:

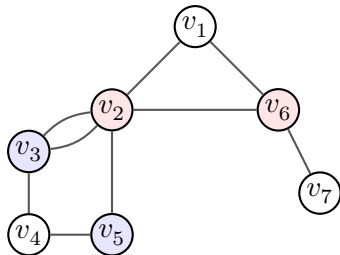
1. $p(G - V') > p(G)$ (破坏了连通性)
2. 对任意真子集 $V'' \subsetneq V'$,
均有 $p(G - V'') = p(G)$ (极小性)

则称 V' 为 **点割集**。

■ **割点:**点割集仅含一个顶点 ($|V'| = 1$)。

示例:

- $\{v_3, v_5\}$ 是点割集 (缺一不可)。
- v_2, v_6 是点割集,也是割点。
- $\{v_4, v_2\}$ **不是**点割集
(子集 $\{v_2\}$ 已满足,冗余了 v_4)。



红色: 割点 蓝色: $\{v_3, v_5\}$ 点割集

边割集定义:若 $E' \subseteq E$ 满足以下条件:

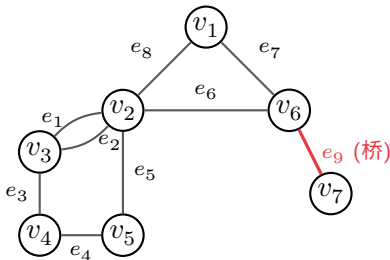
1. $p(G - E') > p(G)$ (破坏了连通性)
2. 对任意真子集 $E'' \subsetneq E'$,
均有 $p(G - E'') = p(G)$ (极小性)

则称 E' 为 **边割集**(简称割集)。

■ **割边 / 桥:**边割集仅含一条边 ($|E'| = 1$)。

示例:

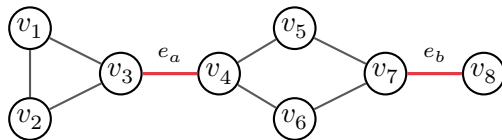
- $\{e_3, e_4\}, \{e_1, e_2, e_3\}$ 是边割集。
- e_9 是边割集,也是桥。
- $\{e_6, e_7, e_8\}$ **不是**边割集
(子集 $\{e_7, e_8\}$ 已足,冗余了 e_6)。



题: 复杂网络拓扑分析

对于右侧给出的无向图 G , 请完成:

1. 识别所有的割点。
2. 识别所有的桥(割边)。
3. 集合 $V' = \{v_5, v_6\}$ 是否为点割集? 如果是, 请验证其极小性。



1. 割点判定:

- v_3 是左侧三角形与外界的唯一通路 $\Rightarrow$ **割点**。
- v_4 是连接左右两个核心结构的关隘 $\Rightarrow$ **割点**。
- v_7 是悬挂点 v_8 的唯一邻居 $\Rightarrow$ **割点**。

2. 桥的判定:

- 边 e_a 和 e_b 是连接不同连通分支的关键路径 $\Rightarrow$ **桥**。

3. $V' = \{v_5, v_6\}$ 的判定:

- **破坏性**: 删去 $\{v_5, v_6\}$ 后, v_7, v_8 与其余部分断开。
- **极小性**: 若仅删去 v_5 , 仍有通路 $v_4 - v_6 - v_7$; 仅删去 v_6 同理。
- **结论**: 极小性成立, $\{v_5, v_6\}$ 是**点割集**。

结论: **割点**: v_3, v_4, v_7 ; **桥**: e_a, e_b ; **点割集**: $\{v_5, v_6\}$

设有向图 $D = \langle V, E \rangle$, 定义可达关系
 $u \rightsquigarrow v \iff \exists$ 从 u 到 v 的有向通路:

■ **强连通 (Strongly Connected):**

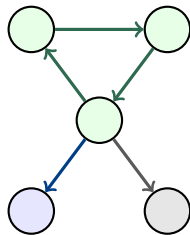
$$\forall u, v \in V, u \rightsquigarrow v \wedge v \rightsquigarrow u.$$

■ **单向连通 (Unilaterally Connected):**

$$\forall u, v \in V, u \rightsquigarrow v \vee v \rightsquigarrow u.$$

■ **弱连通 (Weakly Connected):**

D 的底层无向图(基图)是连通的。



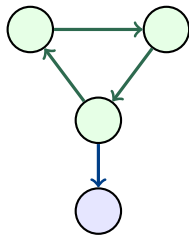
绿区: 强连通 加蓝点: 单向连通

全图: 弱连通 (因左右下两点互不可达)

充要条件 (基于遍历视角):

- **强连通** $\iff D$ 存在包含所有顶点的**有向回路**。
- **单向连通** $\iff D$ 存在包含所有顶点的**有向通路**。

注:这里的通路和回路不要求是初级的,即允许重复经过某些节点或边,只要最终能串联/闭合遍历全图所有节点即可。



寻找一条**一笔画**(允许重复交汇)
串起所有顶点的“项链”

关联矩阵、邻接矩阵与可达矩阵

PART 3

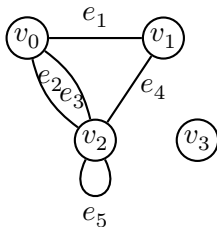
关联矩阵描述顶点与边的归属关系。

定义: $M = (m_{ij})_{n \times m}$

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \text{ 与边 } e_j \text{ 关联} \\ 2, & e_j \text{ 是 } v_i \text{ 上的环} \\ 0, & \text{不关联} \end{cases}$$

性质:

- 每列之和恒为 2。
- 第 i 行之和等于顶点 v_i 的度 $d(v_i)$ 。
- 全 0 行对应孤立点。
- 平行边对应的列相同。



$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(行: $v_0 \sim v_3$, 列: $e_1 \sim e_5$)

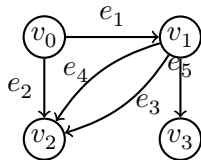
有向关联矩阵引入了方向性(始点与终点)。

定义: $M = (m_{ij})_{n \times m}$

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \text{ 是 } e_j \text{ 的始点} \\ -1, & v_i \text{ 是 } e_j \text{ 的终点} \\ 0, & \text{不关联} \end{cases}$$

性质:

- 每列之和恒为 0。
- 1 的个数为出度, -1 的个数为入度。
- 平行边对应的列相同。



$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(行: $v_0 \sim v_3$, 列: $e_1 \sim e_5$)

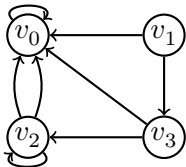
邻接矩阵记录顶点间的直接通路数(支持多重边与环)。

定义: $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$

a_{ij} = v_i 到 v_j 的有向边数

性质:

- 第 i 行和为顶点 v_i 的出度 $d^+(v_i)$ 。
- 第 j 列和为顶点 v_j 的入度 $d^-(v_j)$ 。
- 对角线元素 a_{ii} 为顶点 v_i 上的环数。



$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

定理: 通路与回路计数定理

设 A 为 n 阶有向图 D 的邻接矩阵, 则 $A^l (l \geq 1)$ 中的元素:

- $a_{ij}^{(l)}$ 为从 v_i 到 v_j 长度为 l 的通路数。
- $a_{ii}^{(l)}$ 为从 v_i 到自身 长度为 l 的回路数。
- $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(l)}$ 为 D 中 长度为 l 的通路总数。
- $\sum_{i=1}^n a_{ii}^{(l)}$ 为 D 中 长度为 l 的回路总数 (即迹 $\text{tr}(A^l)$)。

注: 此处的矩阵幂运算采用普通算术乘法, 结果代表通路的数量。

题:推论:累计计数

设 $B_l = A + A^2 + \dots + A^l (l \geq 1)$, 则 B_l 中:

- $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}^{(l)}$ 为长度 $\leq l$ 的通路总数。
- $\sum_{i=1}^n b_{ii}^{(l)}$ 为长度 $\leq l$ 的回路总数。

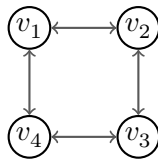
学术意义:通过矩阵求和 B_l , 可以一次性获取图中所有长度不超过 l 的通路分布情况, 是研究连通性与可达性的数学基础。

题: 长度为 l 的通路计数

设有向图 D 的邻接矩阵如下, 请计算:

1. 从 v_1 到 v_3 长度为 2 的通路数。
2. 图 D 中长度为 2 的回路总数。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



(注: 双向箭头表示两条方向相反的有向边)

根据计数定理,需计算 A^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- **问题 1:** v_1 到 v_3 长度为 2 的通路数为矩阵的 $(1, 3)$ 元素 $\Rightarrow$ 2 条。
(具体为 $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3$ 和 $v_1 \rightarrow v_4 \rightarrow v_3$)。
- **问题 2:** 长度为 2 的回路总数对应矩阵的迹 $\text{tr}(A^2)$:

$$\sum_{i=1}^4 a_{ii}^{(2)} = 2 + 2 + 2 + 2 = 8 \text{ 条}$$

题:多步通路计数与累计分析

在如下有向图 D 中 (邻接矩阵 A 见右侧), 请回答:

1. 计算长度为 1, 2, 3, 4 的通路/回路各有多少?
2. 计算长度 ≤ 4 的通路和回路总数。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(对应图例见前页)

对于前页给出的邻接矩阵 $\mathbf{A}$, 其各阶幂计算如下:

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 每一阶的迹(回路数)均为 2。
- 长度为 l 的通路总数即为 $\mathbf{A}^l$ 的全元素之和。

长度 l	通路数	回路数
1	8	2
2	13	2
3	19	2
4	25	2
合计	65	8

■ 单步判定:通过 A^l 确定。

■ 累计判定:通过 B_4 确定。

结果表明该图具有稳定的路径增长特性,
且回路结构恒定。

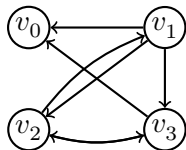
可达矩阵描述两点间是否存在任意长度的通路。

■ 定义: $P = (p_{ij})_{n \times n}$

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \rightsquigarrow v_j \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

■ 性质:

- 主对角线元素全为 1 (自身可达)。
- D 强连通 $\iff P = J$ (全 1)。



$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(由于 v_0 无法到达其他点, 非强连通)

注意: 基于邻接矩阵的计算

$$P = I \vee A^{(1)} \vee A^{(2)} \vee \dots \vee A^{(n-1)}$$

本节结束