

5-4 关键路径问题

第五章：图论 · AOE 网与任务进度优化

张 振



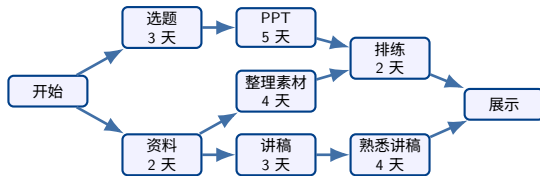
厦门大学嘉庚学院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

- 1 例题引入
- 2 AOE 网
- 3 关键路径理论
- 4 典型例题

某小组要完成一次课程汇报。各准备活动的先后关系如下：

活动	紧前活动	时间/天	活动	紧前活动	时间/天
选题	—	3	整理素材	查资料	4
查资料	—	2	写讲稿	查资料	3
做 PPT	选题	5	排练	做 PPT、整理素材	2
熟悉讲稿	写讲稿	4			



本节要解决的问题

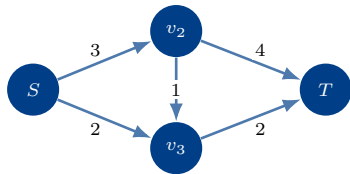
总准备时间是多少？哪些活动一旦延期，就会拖延最终展示？

把例题中的活动表 转化为有向无环图

PART 2

AOE 网是一个赋权有向无环图。

- 顶点 v_i : 事件, 即若干活动完成后的状态。
- 有向边 $\langle u, v \rangle$: 活动。
- 边权 $w(u, v)$: 完成该活动所需时间。
- 源点 S : 准备开始; 汇点 T : 可以展示。



先后约束

边 $\langle u, v \rangle$ 表示: 事件 u 发生后, 该活动才能开始;
活动完成后, 事件 v 才能发生。

继续围绕例 1 计算事件时间和活动时间

PART 3

含义

$ES(v_i)$ 表示事件 v_i 最早可能发生的时间。

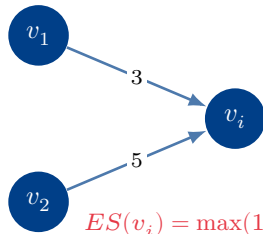
若多个活动汇入 v_i , 必须等待所有前置活动完成:

$$ES(S) = 0$$

$$ES(v_i) = \max_{v_j \rightarrow v_i} \{ES(v_j) + w_{ji}\}.$$

因此, 正向计算本质上是在 DAG 中求从源点出发的最长约束时间。

$$ES = 10$$



$$ES(v_i) = \max(13, 17) = 17$$

$$ES = 12$$

含义

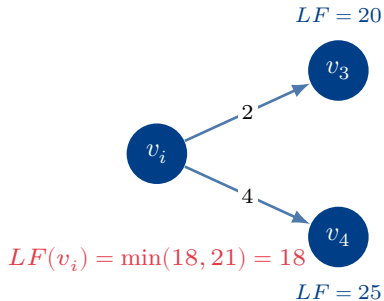
$LF(v_i)$ 表示不拖延总准备时间时, 事件 v_i 最晚允许发生的时间。

若多个活动从 v_i 发出, 必须满足所有后续活动的开工要求:

$$LF(T) = ES(T)$$

$$LF(v_i) = \min_{v_i \rightarrow v_j} \{LF(v_j) - w_{ij}\}.$$

逆向计算时, 最紧的后续约束决定当前事件的最晚时间。



对活动 $e = \langle u, v \rangle$, 设耗时为 w 。

活动时间

$$EF(e) = ES(e) + w,$$

$$LF(e) = LS(e) + w.$$

ES	Early Start	EF	Early Finish
LS	Late Start	LF	Late Finish

关键活动

松弛时间 SL : Slack

$$SL(e) = LS(e) - ES(e) = LF(e) - EF(e).$$

若 $SL(e) = 0$, 则活动 e 是关键活动。

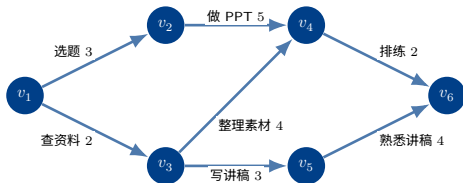


回到例 1, 完整填写活动时间表

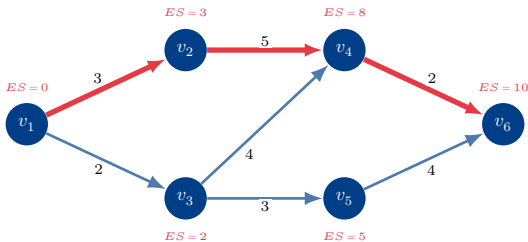
PART 4

题:问题

某小组要完成一次课程汇报。给定如下 AOE 网,边权表示准备任务所需天数。求各事件的 ES, LF , 填写活动时间表 ES, EF, LS, LF, SL , 并标出关键路径与总准备时间。



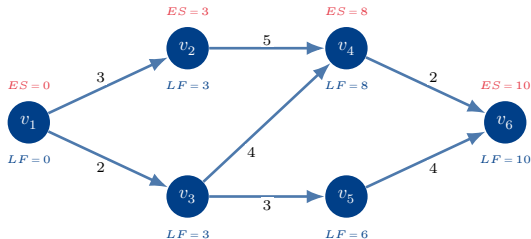
- $ES(v_1) = 0$
- $ES(v_2) = 0 + 3 = 3$
- $ES(v_3) = 0 + 2 = 2$
- $ES(v_4) = \max(3 + 5, 2 + 4) = 8$
- $ES(v_5) = 2 + 3 = 5$
- $ES(v_6) = \max(8 + 2, 5 + 4) = 10$



阶段结论

最早可以完成展示准备的时间为 10 天。

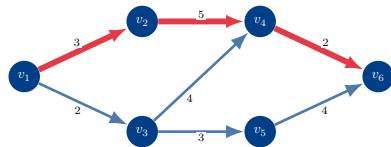
- $LF(v_6) = ES(v_6) = 10$
- $LF(v_5) = 10 - 4 = 6$
- $LF(v_4) = 10 - 2 = 8$
- $LF(v_3) = \min(8 - 4, 6 - 3) = 3$
- $LF(v_2) = 8 - 5 = 3$
- $LF(v_1) = \min(3 - 3, 3 - 2) = 0$



校验

源点最晚时间回到 0, 与开工时间一致。

活动	ES	EF	LS	LF	SL
选题	0	3	0	3	0
查资料	0	2	1	3	1
做 PPT	3	8	3	8	0
整理素材	2	6	4	8	2
写讲稿	2	5	3	6	1
排练	8	10	8	10	0
熟悉讲稿	5	9	6	10	1



判读

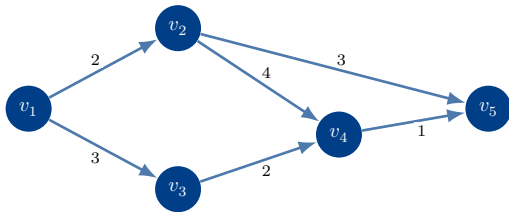
$SL = 0$ 的活动是关键活动。

$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_4 \rightarrow v_6$, 10 天.

题:练习

某小组准备一次课堂展示, AOE 网如下。边权表示任务所需天数。

1. 求总准备时间。
2. 找出关键路径。
3. 判断活动 $v_2 \rightarrow v_5$ 延期 1 天是否影响展示。



事件时间

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
ES	0	2	3	6	7
LF	0	2	4	6	7

$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_4 \rightarrow v_5$, 7 天.

活动	ES	EF	LS	LF	SL
$v_1 \rightarrow v_2$	0	2	0	2	0
$v_1 \rightarrow v_3$	0	3	1	4	1
$v_2 \rightarrow v_4$	2	6	2	6	0
$v_3 \rightarrow v_4$	3	5	4	6	1
$v_2 \rightarrow v_5$	2	5	4	7	2
$v_4 \rightarrow v_5$	6	7	6	7	0

延期判断

$SL(v_2 \rightarrow v_5) = 2$, 延期 1 天不影响最终展示。

1. 正向计算各事件最早时间。
2. 逆向计算各事件最晚时间。
3. 对每条活动填写 ES, EF, LS, LF, SL 。
4. 选出 $SL = 0$ 的关键活动, 连接成关键路径。

与最短路径的对照

最短路径找“代价最小”的路; 关键路径在 AOE 网中找“工期约束最长”的路。

课堂检查

如果关键活动延期 1 天, 最终展示也会至少推迟 1 天。

本节结束