

5-5 图的着色理论

第五章:图论基础

张振



厦门大学嘉庚学院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

- 1 引入
- 2 基本概念
- 3 色数估计
- 4 例题

图着色问题

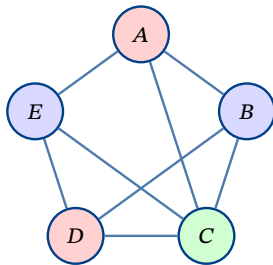
PART 1

某学院安排 5 门考试。若两门课有共同学生,则不能安排在同一时间段。

- 顶点:一门课程或一个任务。
- 边:两个任务之间存在冲突。
- 颜色:可选时间段、频率、寄存器或资源编号。

核心问题

如何用尽可能少的颜色,使每条边两端的顶点颜色不同?



3 种颜色表示 3 个互不冲突的时间段

1. 建模

把“不能同时发生”的关系转化为图中的边。

2. 判定

识别二部图、完全图、奇圈等典型结构的色数。

3. 估计

用团数、最大度和贪心算法给出上下界。

注意:学习重点

本节重点不是记住大量定理名称,而是学会把实际冲突问题翻译成图着色问题,并能判断色数的必要下界与可行上界。

点着色与色数

PART 2

设 $G = \langle V, E \rangle$ 是无环无向图。

定义: k -点着色

G 的一个 k -点着色是映射

$$f : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\},$$

使得对任意边 $\langle u, v \rangle \in E$, 都有 $f(u) \neq f(v)$ 。

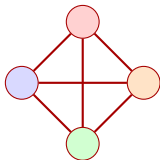
- 若 G 存在 k -点着色, 则称 G 是 k -可着色的。
- 使 G 可着色的最小颜色数称为 **色数**, 记作 $\chi(G)$ 。
- 等价地, k -着色就是把 V 划分为不超过 k 个独立集; 也可看作 k 个允许为空的 **颜色类**。

$$\chi(G) = \min\{k \mid G \text{ 是 } k\text{-可着色的}\}.$$

完全图

在 K_n 中,任意两个顶点都相邻,因此每个顶点必须使用不同颜色:

$$\chi(K_n) = n.$$

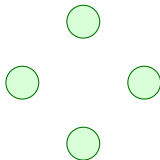


K_4 需要 4 种颜色

空图

若 $E = \emptyset$ 且 $V \neq \emptyset$,任意顶点之间没有冲突,一个颜色即可:

$$\chi(\overline{K_n}) = 1.$$

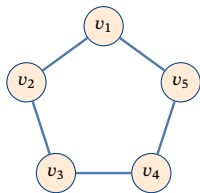


无边图只需 1 种颜色

定义:圈

若图中存在顶点序列 $v_1v_2 \cdots v_nv_1$ ($n \geq 3$), 其中 $v_1, \dots, v_n$ 两两不同, 且相邻顶点之间都有边, 则称它为一个长度为 n 的圈, 记作 C_n 。

- 若 n 为奇数, 称 C_n 为 **奇圈**, 通常记作 C_{2m+1} 。
- 若 n 为偶数, 称 C_n 为 **偶圈**, 通常记作 C_{2m} 。



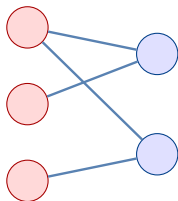
C_5 是长度为 5 的奇圈

定理

对无向图 G , 以下命题等价:

1. G 可用不超过 2 种颜色着色;
2. G 是二部图;
3. G 中不含奇圈。

- 两种颜色对应二部图的两个顶点部分, 允许某一部分为空。
- 奇圈会迫使首尾冲突, 是二染色的唯一障碍。



二部图的两侧即两种颜色

以 C_5 为例,若从一个顶点开始交替使用两种颜色:

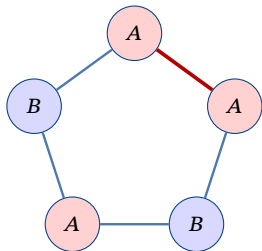
A, B, A, B, A

最后一条边的两端都会被迫成为颜色 A ,与着色规则矛盾。

结论

对任意奇圈 C_{2m+1} ($m \geq 1$),有

$$\chi(C_{2m+1}) = 3.$$



首尾同色,二染色失败

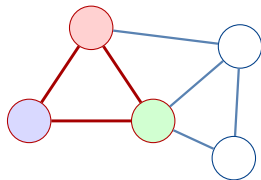
下界与上界

PART 3

- **团**: 图中的完全子图。
- **团数**: 最大团的顶点数, 记为 $\omega(G)$ 。

团中任意两个顶点都相邻, 不能共用颜色, 因此:

$$\chi(G) \geq \omega(G).$$



红色部分为 K_3 , 故 $\chi(G) \geq 3$

注意: 易错点

$\omega(G)$ 只是下界, 不一定等于 $\chi(G)$ 。例如 C_5 中 $\omega(C_5) = 2$, 但 $\chi(C_5) = 3$ 。

按某个顺序依次给顶点着色:对当前顶点,选择尚未被相邻已着色顶点使用的最小颜色。

若最大度为 $\Delta(G)$,任一顶点最多有 $\Delta(G)$ 个邻居,因此总能在

$$\Delta(G) + 1$$

种颜色中找到可用颜色。

基本上界

对任意简单图 G ,

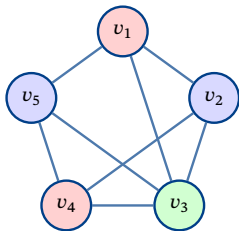
$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

步骤	顶点	可选颜色
1	v_1	1
2	v_2	2
3	v_3	1 或 3
4	v_4	最小可行色

注意:算法意识

贪心算法给出的是可行上界;不同顶点顺序可能得到不同颜色数。

对下图按顺序 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 依次着色, 每一步都选当前顶点可以使用的编号最小的颜色。
本图中 $d(v_3) = 4$ 最大, 故 $\Delta(G) = 4$, $\Delta(G) + 1 = 5$ 。



得到一个 3-着色

步骤	顶点	已着色邻点颜色	选色
1	v_1	无	1
2	v_2	$v_1 : 1$	2
3	v_3	$v_1 : 1, v_2 : 2$	3
4	v_4	$v_2 : 2, v_3 : 3$	1
5	v_5	$v_1 : 1, v_3 : 3, v_4 : 1$	2

关键

$\Delta(G) + 1$ 给出保证: 本例不超过 5 色; 表中实际只用了 3 色。

定理 (Brooks)

设 G 是连通简单图, 最大度为 $\Delta(G)$ 。若 G 不是完全图, 也不是奇圈, 则

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

例外结构

$$\chi(K_n) = n = \Delta(K_n) + 1$$

$$\chi(C_{2m+1}) = 3 = \Delta(C_{2m+1}) + 1$$

- 完全图的每个顶点都互相冲突。
- 奇圈不能用 2 种颜色交替闭合。
- 其他连通图通常能把 $\Delta + 1$ 降到 Δ 。

1. **先找下界**: 是否含有大团? 是否含有奇圈? 是否至少需要某些资源数?
2. **再找上界**: 能否直接构造着色? 能否用贪心算法或 $\Delta(G) + 1$?
3. **最后夹逼**: 若下界和上界相同, 就得到精确色数。

常用不等式

对任意非空简单图 G ,

$$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

若 G 连通且既非完全图又非奇圈, 则进一步有 $\chi(G) \leq \Delta(G)$ 。

典型例题

PART 4

题: 问题描述

有 5 门考试 A, B, C, D, E 。若两门课有共同学生, 则不能安排在同一时间段。冲突关系为

$$AB, AC, BC, CD, DE, EA.$$

问至少需要多少个考试时间段?

- A, B, C 两两冲突, 构成 K_3 。

$$\chi(G) \geq \omega(G) \geq 3.$$

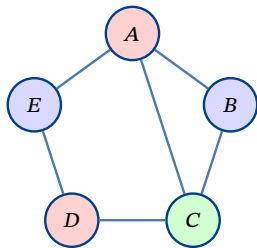
- 构造 3-着色:

$$f(A) = 1, \quad f(B) = 2, \quad f(C) = 3,$$

$$f(D) = 1, \quad f(E) = 2.$$

- 因此下界和上界相同。

$$\chi(G) = 3$$



3 个时间段即可

题:问题描述

设 G 是连通简单图, 满足:

- G 含有一个 4 阶完全子图;
- $\Delta(G) = 4$;
- G 不是完全图。

求 $\chi(G)$ 。

1. 因为 G 含有 K_4 , 所以

$$\chi(G) \geq \omega(G) \geq 4.$$

2. 因为 G 连通、 $\Delta(G) = 4$, 且 G 不是完全图; 又 G 含有 K_4 , 不可能是奇圈。

3. 由 Brooks 定理可得

$$\chi(G) \leq \Delta(G) = 4.$$

夹逼结论

$$4 \leq \chi(G) \leq 4, \quad \chi(G) = 4.$$

- 点着色把顶点分成若干独立集, 色数 $\chi(G)$ 表示所需最少颜色数。
- 二部图等价于 2-可着色图, 奇圈是二染色失败的关键结构。
- 色数估计常用路线是

$$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

- Brooks 定理说明: 除完全图和奇圈外, 连通简单图通常满足 $\chi(G) \leq \Delta(G)$ 。

本节结束