

离散数学期末复习讲义(教师版)

三大篇章·高频考点·典型题型

MatNoble

目录

1 复习定位	3
2 逻辑篇	4
考点 L1: 命题符号化与命题判断	4
考点 L2: 主析取范式、主合取范式与成真/成假赋值	6
考点 L3: 量词辖域与谓词符号化	9
考点 L4: 前束范式	11
考点 L5: 推理证明	12
3 集合与二元关系篇	14
考点 S1: 幂集与子集计数	14
考点 S2: 二元关系个数	16
考点 S3: 关系图与关系矩阵互化	18
考点 S4: 关系复合与复合后的关系图	20
考点 S5: 等价关系与偏序关系判断	22
考点 S6: 由关系矩阵画哈斯图	24
4 图论篇	27
考点 G1: 度数、握手定理与简单图最大度	27
考点 G2: 通路、简单通路、初级通路	29
考点 G3: 邻接矩阵幂与通路、回路计数	31
考点 G4: 完全图的非同构生成子图	34
考点 G5: Dijkstra 最短路径	36
考点 G6: AOE 网络与关键路径	38

1 复习定位

本轮离散数学期末复习按三大篇章组织：

逻辑篇 集合与二元关系篇 图论篇.

下面的考点以样卷和高频题型为主线组织。每个考点保留解题所必需的定義、性质和判定条件, 保证知识点前后连贯、表述严密, 不扩展为完整课程提纲。

篇章	核心考点	重点方法
逻辑篇	命题符号化、命题判断、主范式、量词辖域、前束范式、推理证明	翻译、真值表、等值演算、约束变元改名、推理规则
集合与二元关系篇	幂集、关系个数、关系图与关系矩阵、关系复合、关系性质、偏序矩阵与哈斯图	子集计数、矩阵互化、布尔乘法、性质判定、覆盖关系
图论篇	度数、通路、完全图生成子图、邻接矩阵回路、Dijkstra、关键路径	握手定理、矩阵幂、非同构判别、标号法、AOE 表格

2 逻辑篇

考点 L1:命题符号化与命题判断

相关知识点

1. **命题**是能够判断真假的陈述句;疑问句、祈使句、感叹句和没有明确判定标准的主观评价不是命题。
2. **命题符号化**要先定义基本命题,如 A, B ,再用 $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ 连接。
3. “不是……不……”常对应**双重否定**;例如“不是 A 不成立”可写为 $\neg(\neg A)$ 。
4. 常见中文联结词对照:

符号	常见中文表达
$\neg$	不、并非、不是、没有
$\wedge$	且、并且、而且、但是、而是、同时
$\vee$	或、或者、至少一个、二者之一或二者都
$\rightarrow$	若……则……、如果……那么……、只要……就……
$\leftrightarrow$	当且仅当、等价于、充要条件

5. **蕴含方向**要特别注意:“ P 是 Q 的充分条件”写作 $P \rightarrow Q$;“ P 是 Q 的必要条件”写作 $Q \rightarrow P$ 。

例题 1:判断“你笑起来真好看。”是否为命题。

解答

1. 命题必须是能够判断真假的陈述句。
2. “你笑起来真好看”带有主观评价色彩,在没有明确评价标准时不能判定真假。
所以它不是命题。

例题 2:设 P :下雨; Q :地面湿。将“只要下雨,地面就湿”符号化。

解答

1. “只要 P , 就 Q ”表示 P 是 Q 的充分条件。
2. 充分条件在蕴含式左侧,必要结果在右侧。

因此符号化为

$$P \rightarrow Q.$$

不要写反成 $Q \rightarrow P$ 。

例题 3: 设 A : 羽绒服买得起; B : 大衣更有性价比。将“不是羽绒服买不起, 而是大衣更有性价比”符号化。

解答

1. “羽绒服买不起”是 $\neg A$ 。
2. “不是羽绒服买不起”是 $\neg(\neg A)$, 等价于 A 。
3. “而是”在这里表达并列成立, 所以用 $\wedge$ 连接。

因此命题可符号化为

$$\neg(\neg A) \wedge B,$$

也可化简为 $A \wedge B$ 。

易错提醒

自然语言中的“不是……不……”容易漏掉双重否定; “或者”要结合题意判断是否按相容析取 $\vee$ 处理。

考点 L2: 主析取范式、主合取范式与成真/成假赋值

相关知识点

1. 真值表

n 个命题变元 $\Rightarrow 2^n$ 行赋值.

真值表结果	公式类型
全为真	重言式
全为假	矛盾式
有真有假	可满足式

2. 主范式

对象	形式	来源
小项 m_i	全部变元各出现一次的合取式	成真赋值
大项 M_i	全部变元各出现一次的析取式	成假赋值
主析取范式	$m_{i_1} \vee m_{i_2} \vee \dots$	成真行
主合取范式	$M_{j_1} \wedge M_{j_2} \wedge \dots$	成假行

3. 编号规则

变元顺序	p, q, r	
赋值	$pqr = 101$	按变元顺序读二进制得到下标。
编号	5	

注意: 普通范式不一定是主范式; 主范式要求每一项都含全部变元。

例题 1: 设 $B = p \wedge \neg q$, 判断它是否既是合取范式也是析取范式。

解答

1. $p \wedge \neg q$ 是若干文字的合取, 因此是合取范式。
2. 单个合取项也可看成析取范式中的一个析取项, 所以它也是析取范式。
3. 但它不是关于 p, q 的主析取范式或主合取范式的完整写法, 因为主范式要求每一项都含全部变元, 并按成真或成假赋值完整列出。

例题 2: 用真值表判断 $p \rightarrow q$ 与 $\neg p \vee q$ 是否等值。

解答

列真值表:

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

两列真值完全相同, 所以

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q.$$

例题 3: 用等值演算求命题公式 $A = (p \rightarrow q) \rightarrow r$ 的主析取范式、主合取范式、成真赋值、成假赋值。

解答

先消去蕴含:

$$(p \rightarrow q) \rightarrow r \equiv \neg(\neg p \vee q) \vee r \equiv (p \wedge \neg q) \vee r.$$

按变元顺序 p, q, r 列真值表:

p	q	r	A
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

由真值表读出, 成真赋值为

001, 011, 100, 101, 111,

对应小项编号为 1, 3, 4, 5, 7。因此

$$A \equiv m_1 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7.$$

成假赋值为

000, 010, 110,

对应大项编号为 0, 2, 6, 故主合取范式为

$$A \equiv M_0 \wedge M_2 \wedge M_6.$$

考点 L3:量词辖域与谓词符号化

相关知识点

1. 全称量词 $\forall x$ 表示“任意 x ”;存在量词 $\exists x$ 表示“存在某个 x ”。
2. 量词辖域是不含该量词本身、但直接受该量词约束的公式;括号决定辖域大小。
3. 约束变元只在对应辖域内有效;不同量词即使用同一个字母,也表示各自辖域内的局部变量。
4. “所有 A 都是 B ”常写为 $\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$ 。
5. “有的 A 是 B ”常写为 $\exists x(A(x) \wedge B(x))$ 。

例题 1:谓词公式 $\exists x(A(x) \rightarrow \forall yB(y)) \vee \exists yD(y)$ 中量词 $\exists y$ 的辖域是什么?

解答

1. 先定位题目问的量词:它是公式右侧的 $\exists y$ 。
2. 该量词直接约束的公式是 $D(y)$ 。

因此该量词的辖域为

$$D(y).$$

注意左侧 $\forall yB(y)$ 中的 y 由 $\forall y$ 约束,和右侧 $\exists y$ 不是同一个约束关系。

例题 2:设 $S(x)$ 表示“ x 是学生”, $H(x)$ 表示“ x 会画哈斯图”。将“所有学生都会画哈斯图”符号化。

解答

1. “所有学生”对应全称量词 $\forall x$ 。
2. “学生都会画哈斯图”是“若 x 是学生,则 x 会画哈斯图”。

因此应写成全称蕴含:

$$\forall x(S(x) \rightarrow H(x)).$$

不能写成 $\forall x(S(x) \wedge H(x))$,后者表示论域中每个对象都是学生且都会画哈斯图,含义过强。

例题 3:命题“有的工人有拖延症。”写出谓词符号化与命题符号化。

解答

1. 设论域为人。
2. 令 $W(x)$ 表示“ x 是工人”, $T(x)$ 表示“ x 有拖延症”。

3. “有的”表示存在量词,且同一个对象同时满足两个谓词,所以用 $\wedge$ 。

谓词符号化为

$$\exists x(W(x) \wedge T(x)).$$

若只作命题符号化,可令 P 表示“有的工人有拖延症”,则该命题符号化为 P 。

考点 L4: 前束范式

相关知识

1. 前束范式形如 $Q_1x_1Q_2x_2\cdots Q_nx_nB$, 其中 B 不含量词。
2. 第一步消去蕴含: $P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$ 。
3. 第二步否定内移: $\neg\forall xP(x) \equiv \exists x\neg P(x)$, $\neg\exists xP(x) \equiv \forall x\neg P(x)$ 。
4. 第三步约束变元改名, 避免不同量词共用同一字母造成混淆。
5. 第四步在变元不自由出现的条件下前移量词, 例如 $(QxP(x)) \vee R \equiv Qx(P(x) \vee R)$ 。

例题 1: 将 $(\forall xP(x)) \rightarrow \exists yQ(y)$ 化为前束范式。

解答

消去蕴含:

$$(\forall xP(x)) \rightarrow \exists yQ(y) \equiv \neg\forall xP(x) \vee \exists yQ(y).$$

否定内移:

$$\exists x\neg P(x) \vee \exists yQ(y).$$

量词前移得到

$$\exists x\exists y(\neg P(x) \vee Q(y)).$$

例题 2: 求 $(\exists xA(x) \vee \exists xB(x)) \rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x))$ 的前束范式。

解答

先将不同量词的约束变元改名:

$$(\exists uA(u) \vee \exists vB(v)) \rightarrow \forall w(A(w) \vee B(w)).$$

消去蕴含并否定内移:

$$\begin{aligned} & \neg(\exists uA(u) \vee \exists vB(v)) \vee \forall w(A(w) \vee B(w)) \\ & \equiv (\forall u\neg A(u) \wedge \forall v\neg B(v)) \vee \forall w(A(w) \vee B(w)). \end{aligned}$$

再把量词前移, 得到一个前束范式:

$$\forall u\forall v\forall w((\neg A(u) \wedge \neg B(v)) \vee A(w) \vee B(w)).$$

考点 L5:推理证明

相关知识点

1. **推理证明**要先列出前提和结论,再逐行写推理根据。
2. **假言推理**:由 $P \rightarrow Q$ 与 P 可推出 Q 。
3. **拒取式**:由 $P \rightarrow Q$ 与 $\neg Q$ 可推出 $\neg P$ 。
4. **析取三段论**:由 $P \vee Q$ 与 $\neg P$ 可推出 Q 。
5. 证明题不能只写结论,要说明每一步由哪些前提或已证公式推出。

例题 1:某教室投影无法使用。调查后得到:

- (1) 如果线路正常,则投影仪有电;
- (2) 如果线路不正常,则需要报修;
- (3) 或者电源开关打开,或者投影仪没有电;
- (4) 电源开关没有打开。

请先进行符号化,再证明需要报修。

解答

令 L 表示“线路正常”, P 表示“投影仪有电”, S 表示“电源开关打开”, R 表示“需要报修”。条件符号化为

$$L \rightarrow P, \quad \neg L \rightarrow R, \quad S \vee \neg P, \quad \neg S.$$

由 $S \vee \neg P$ 和 $\neg S$,用析取三段论得

$$\neg P.$$

由 $L \rightarrow P$ 和 $\neg P$,用拒取式得

$$\neg L.$$

由 $\neg L \rightarrow R$ 和 $\neg L$,用假言推理得

$$R.$$

因此需要报修。

例题 2:在一个刑事案件中,刑警抓到四名嫌疑人,调查后确认:

- (1) 只有 B 是主谋, C 才是主谋;

- (2) 如果 C 不是主谋, 则 D 是主谋;
(3) 或者 A 是主谋, 或者 B 不是主谋;
(4) A 不是主谋。

请先进行符号化, 再用推理方法证明谁是真正的主谋。

解答

令 A, B, C, D 分别表示“对应嫌疑人是主谋”。条件符号化为

$$C \rightarrow B, \quad \neg C \rightarrow D, \quad A \vee \neg B, \quad \neg A.$$

推理如下:

1. $A \vee \neg B$ 前提
2. $\neg A$ 前提
3. $\neg B$ 由 1,2 析取三段论
4. $C \rightarrow B$ 前提
5. $\neg C$ 由 3,4 拒取式
6. $\neg C \rightarrow D$ 前提
7. D 由 5,6 假言推理

因此 D 是真正的主谋。

3 集合与二元关系篇

本篇重点知识

1. 熟练掌握关系的三种表示:集合表示、关系矩阵、关系图。
2. 能在关系图与关系矩阵之间互相转换,并注意自环、反向边和元素顺序。
3. 能用“长度为 2 的有向通路”理解关系复合,并画出复合后的关系图。
4. 能判断关系是否为等价关系或偏序关系,尤其区分对称性与反对称性。
5. 能从关系矩阵或关系图中提取覆盖关系,进而画出哈斯图。

考点 S1:幂集与子集计数

相关知识点

1. 幂集 $\mathcal{P}(A)$ 是集合 A 的所有子集构成的集合。
2. 空集 $\emptyset$ 是任意集合的子集,所以 $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ 。
3. 若 $|A| = n$, 则 A 的子集个数为 2^n , 即 $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$ 。
4. $\emptyset$ 与 $\{\emptyset\}$ 不同:前者没有元素,后者有一个元素。
5. 若 $A = \{\emptyset\}$, 则 A 只有一个元素,所以 $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ 。

例题 1:若 $A = \{1, 2, 3\}$, 则 $|\mathcal{P}(A)|$ 是多少?

解答

1. A 有 3 个元素。
2. 每个元素在构造子集时都有“取”或“不取”两种选择。

因此

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^3 = 8.$$

例题 2:设 $A = \{\emptyset\}$, 判断 $\mathcal{P}(A)$ 的正确表达式。

解答

1. $A = \{\emptyset\}$ 中只有一个元素,这个元素是 $\emptyset$ 。
2. 一个一元集合的子集有两个:空集本身,以及由这个元素组成的集合。

因此 A 的子集为

$$\emptyset, \quad \{\emptyset\}.$$

所以

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}.$$

注意 $\emptyset$ 是空集, $\{\emptyset\}$ 是含有一个元素 $\emptyset$ 的集合。

例题 3: 设 $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, 求 $|\mathcal{P}(A)|$ 。

解答

1. A 中有两个元素: 一个是 $\emptyset$, 另一个是 $\{\emptyset\}$ 。
2. 二者不是同一个对象, 所以 $|A| = 2$ 。

因此

$$|A| = 2, \quad |\mathcal{P}(A)| = 2^2 = 4.$$

这里不要把 $\emptyset$ 与 $\{\emptyset\}$ 混为一个元素。

考点 S2: 二元关系个数

相关知识点

1. A 上的二元关系是笛卡尔积 $A \times A$ 的任意子集。
2. 若 $|A| = n$, 则 $|A \times A| = n^2$ 。
3. 每个有序对都可选择“属于关系”或“不属于关系”, 所以二元关系总数为 2^{n^2} 。
4. 若题目问从 A 到 B 的二元关系, 则关系是 $A \times B$ 的子集, 个数为 $2^{|A||B|}$ 。

例题 1: 设 $|A| = 2$, 则 A 上不同的二元关系有多少个?

解答

1. A 上的二元关系是 $A \times A$ 的子集。
2. 若 $|A| = 2$, 则

$$|A \times A| = 2^2 = 4.$$

3. 含 4 个元素的集合共有 2^4 个子集。

所以不同关系的个数为

$$2^4 = 16.$$

例题 2: 若 $|A| = 5$, 则 A 上二元关系有多少个?

解答

1. A 上的二元关系是 $A \times A$ 的子集。
2. 此时

$$|A \times A| = 5^2 = 25.$$

3. 每个有序对都可以选择是否放入关系中。

所以二元关系个数为

$$2^{25}.$$

例题 3: 若 $|A| = 2, |B| = 3$, 从 A 到 B 的二元关系有多少个?

解答

1. 从 A 到 B 的二元关系是 $A \times B$ 的子集。

2. 因为

$$|A \times B| = |A||B| = 2 \cdot 3 = 6,$$

3. 含 6 个有序对的笛卡尔积共有 2^6 个子集。

所以不同关系个数为

$$2^6 = 64.$$

考点 S3: 关系图与关系矩阵互化

相关知识点

1. 写关系矩阵前必须固定元素顺序, 如 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 。
2. 若 $(a_i, a_j) \in R$, 则矩阵 M_R 的第 i 行第 j 列为 1; 否则为 0。
3. 关系图中每个有序对 (a_i, a_j) 画成一条从 a_i 指向 a_j 的有向边。
4. 主对角线元素 $m_{ii} = 1$ 表示顶点 a_i 有自环。
5. 矩阵转关系图时, 要逐行读取所有 1, 不要漏掉自环和反向边。

例题 1: 设 $A = \{a, b, c\}$, $R = \{(a, b), (b, a), (b, c)\}$ 。按元素顺序 a, b, c 写出关系矩阵。

解答

按行列顺序 a, b, c , 有 (a, b) 、 (b, a) 、 (b, c) 三个有序对, 所以

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

例题 2: 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, 关系图中有弧 $1 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 3$ 。写出 R 的关系矩阵。

解答

按元素顺序 $1, 2, 3, 4$ 排行列。由弧可得

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 4), (4, 3)\}.$$

因此关系矩阵为

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

例题 3: 给定关系矩阵

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

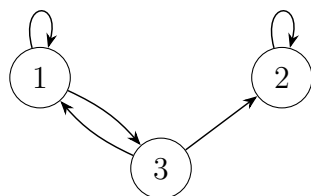
画出对应的关系图。

解答

矩阵第 i 行第 j 列为 1, 表示有弧 $i \rightarrow j$ 。所以

$$R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}.$$

对应关系图为



考点 S4: 关系复合与复合后的关系图

相关知识点

1. 关系复合定义: $(x, z) \in S \circ R$ 当且仅当存在 y , 使 $(x, y) \in R$ 且 $(y, z) \in S$ 。
2. $R^2 = R \circ R$, 表示把关系 R 连续使用两次。
3. 从关系图看, 若存在长度为 2 的有向通路 $x \rightarrow y \rightarrow z$, 则 R^2 中有边 $x \rightarrow z$ 。
4. 从矩阵看, $M_{R^2} = M_R \odot M_R$, 其中加法用“或”, 乘法用“且”。
5. 复合后若多条长度为 2 的通路得到同一有序对, 只写一次。

例题 1: 若 $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$, 写出 R^2 。

解答

寻找长度为 2 的有向通路:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3, \quad 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4.$$

因此

$$R^2 = \{(1, 3), (2, 4)\}.$$

例题 2: 若 $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$, 写出 R^2 。

解答

寻找长度为 2 的有向通路:

$$1 \rightarrow 1 \rightarrow 1, \quad 1 \rightarrow 1 \rightarrow 2, \quad 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3.$$

因此

$$R^2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3)\}.$$

注意自环 $(1, 1)$ 会参与关系复合。

例题 3: 设 $R = \{\langle x, y \rangle \mid x \text{ 与 } y \text{ 是母女关系}\}$, 写出 R^2 。

解答

1. $(x, y) \in R$ 表示 x 是 y 的母亲。

2. $(x, z) \in R^2$ 表示存在 y , 使得

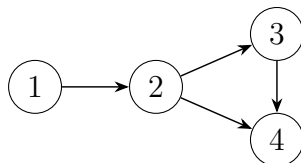
$$xRy, \quad yRz.$$

3. 也就是说 x 是 y 的母亲, y 又是 z 的母亲。

因此 x 是 z 的外祖母, 所以

$$R^2 = \{\langle x, z \rangle \mid x \text{ 是 } z \text{ 的外祖母}\}.$$

例题 4: 给出关系图



画出 R^2 的关系图。

解答

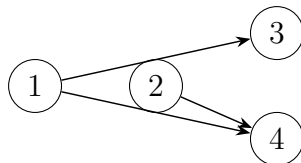
找长度为 2 的有向通路:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3, \quad 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4, \quad 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4.$$

所以

$$R^2 = \{(1, 3), (1, 4), (2, 4)\}.$$

复合后的关系图为



考点 S5: 等价关系与偏序关系判断

相关知识点

1. **自反性**: 对任意 $a \in A$, 都有 $(a, a) \in R$ 。
2. **对称性**: 若 $(a, b) \in R$, 则 $(b, a) \in R$ 。
3. **反对称性**: 若 $(a, b) \in R$ 且 $(b, a) \in R$, 则必须有 $a = b$ 。
4. **传递性**: 若 $(a, b) \in R$ 且 $(b, c) \in R$, 则 $(a, c) \in R$ 。
5. **等价关系**要求自反、对称、传递;**偏序关系**要求自反、反对称、传递。
6. **矩阵判断**时, 自反看主对角线是否全为 1; 反自反看主对角线是否全为 0。
7. **对称**看 $M_R = M_R^T$; **反对称**看是否不存在 $i \neq j$ 时 $m_{ij} = m_{ji} = 1$ 。
8. **布尔平方矩阵** M_R^2 记录“两步关系”: 第 i 行第 j 列为 1, 表示存在中间元素 a_k , 使得 $a_i R a_k$ 且 $a_k R a_j$ 。
9. **传递性矩阵判定**: 所有“两步关系”都必须已经包含在原关系中, 即 $M_R^2 \leq M_R$; 等价地, 若 M_R^2 中某位置为 1, 则 M_R 的对应位置也必须为 1。

例题 1: 判断包含关系 $\subseteq$ 是否为 $\mathcal{P}(S)$ 上的偏序关系。

解答

1. **自反性**: 在 $\mathcal{P}(S)$ 上, 任意集合都满足

$$A \subseteq A,$$

所以自反。

2. **反对称性**: 反对称的要求是若两个方向同时成立, 则两个对象必须相同。对于包含关系,

$$A \subseteq B \quad \text{且} \quad B \subseteq A$$

恰好推出

$$A = B.$$

因此 $\subseteq$ 具有反对称性。

3. **传递性**: 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$, 所以传递。

故 $\subseteq$ 是 $\mathcal{P}(S)$ 上的**偏序关系**。注意, 反对称不是说“不允许双向关系”, 而是说“双向关系只允许发生在同一个元素上”。

例题 2: 设 $A = \{4, 2, 5, 10, 20\}$, R 是 A 上的整除关系, 判断 R 是否为等价关系。

解答

1. **自反性:** 任意 $a \in A$ 都有 $a \mid a$, 所以整除关系自反。

2. **对称性:** 取反例

$$2 \mid 4, \quad 4 \nmid 2.$$

3. **等价关系**必须同时满足自反、对称、传递。

由于对称性不成立, 所以 R 不是**等价关系**。

例题 3: 设

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

判断 R 是否具有自反、反自反、对称、反对称、传递性。

解答

1. **主对角线**全为 1, 所以自反。

2. 主对角线不全为 0, 所以不反自反。

3. 矩阵关于主对角线对称, 所以对称。

4. 由于 $m_{13} = m_{31} = 1$ 且 $1 \neq 3$, 所以不反对称。

该关系为

$$\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (c, a)\}.$$

由 $(a, c), (c, a)$ 推出 (a, a) , 由 $(c, a), (a, c)$ 推出 (c, c) , 相关传递要求均满足, 所以传递。

考点 S6: 由关系矩阵画哈斯图

相关知识点

1. **哈斯图**只用于偏序关系;画图前先检查自反、反对称、传递。
2. 画哈斯图时去掉所有**自环**,因为自反边不在图中画出。
3. 若 $a \preceq b \preceq c$, 则 $a \preceq c$ 是**传递边**, 哈斯图中不直接画。
4. 只保留**覆盖关系**: a 被 b 覆盖, 表示 $a \prec b$ 且不存在 c 满足 $a \prec c \prec b$ 。
5. **最大元**是大于等于所有元素的元素;**极大元**只要求不存在比它更大的元素。
6. **最小元**是小于等于所有元素的元素;**极小元**只要求不存在比它更小的元素。
7. 设 $B \subseteq A$ 。若 $a \in A$ 且对任意 $x \in B$ 都有 $x \preceq a$, 则 a 是 B 的**上界**;上界集中的最小元称为**最小上界**。
8. 若 $a \in A$ 且对任意 $x \in B$ 都有 $a \preceq x$, 则 a 是 B 的**下界**;下界集中的最大元称为**最大下界**。

例题 1: 在偏序集 $A = \{2, 3, 6, 12\}$ 的整除关系中, 求最大元、最小元、极大元、极小元。

解答

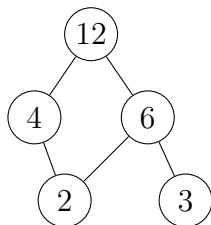
1. 在**整除偏序**中, $a \preceq b$ 表示 $a \mid b$ 。
2. 12 能由 2, 3, 6 整除到达, 所以**最大元**为 12, 也是唯一**极大元**。
3. 不存在一个集合内元素能整除 2, 3, 6, 12 中所有元素, 因为 2 与 3 没有共同的集合内更小元素, 所以最小元不存在。
4. 下方没有更小元素的是 2 和 3, 所以**极小元**为 2, 3。

例题 2: 设 $A = \{2, 3, 4, 6, 12\}$, R 是整除关系。画哈斯图, 并求最大元、最小元、极大元、极小元。

解答

1. **整除关系**中 $a \preceq b$ 表示 $a \mid b$ 。
2. **覆盖关系**为: 2 覆盖到 4, 6, 3 覆盖到 6, 4 覆盖到 12, 6 覆盖到 12。
3. $2 \mid 12, 3 \mid 12$ 是传递边, 不在哈斯图中直接画出。

哈斯图为



最大元 = 12, 极大元 = 12.

2 和 3 下方没有更小元素, 所以**极小元**为 2, 3; 不存在一个元素能整除 A 中所有元素, 所以没有**最小元**。

例题 3: 给定 $A = \{a, b, c, d\}$ 上关系矩阵

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

判断它是否表示偏序关系; 若是, 画哈斯图。

解答

1. **主对角线**全为 1, 所以自反。
2. 矩阵中不存在 $i \neq j$ 时 $m_{ij} = m_{ji} = 1$ 的情况, 所以**反对称**。
3. 由矩阵可读出非自反关系为

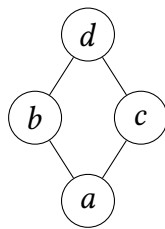
$$a \preceq b, \quad a \preceq c, \quad a \preceq d, \quad b \preceq d, \quad c \preceq d.$$

4. 按传递性的定义, 若 $x \preceq y$ 且 $y \preceq z$, 就必须有 $x \preceq z$ 。在本题中, 需要实际检查的情况为

$$a \preceq b \preceq d, \quad a \preceq c \preceq d.$$

这两种情况都要求推出 $a \preceq d$, 而矩阵中已有 $a \preceq d$ 。其他组合要么只用到了 $x \preceq x$ 这类自反关系, 要么推出的仍是已经列出的关系, 因此不会产生新的关系要求。所以传递性成立。

因此它表示**偏序关系**。去掉自环和传递边 $a \preceq d$, 哈斯图只保留**覆盖关系**:



4 图论篇

考点 G1: 度数、握手定理与简单图最大度

相关知识点

1. n 阶简单图中, 每个顶点最多与其余 $n - 1$ 个顶点相邻, 所以 $\Delta(G) \leq n - 1$ 。
2. 最小度 $\delta(G)$ 是所有顶点度数的最小值; 最大度 $\Delta(G)$ 是所有顶点度数的最大值。
3. 若 $\delta(G) = n - 1$, 则每个顶点度数都等于 $n - 1$, 图为完全图 K_n 。
4. 无向图握手定理: $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$ 。
5. 度数为 0 的顶点是孤立点; 若题目没有排除孤立点, 不能仅由边数推出顶点数上界。
6. n 阶有向完全图中, 任意两个不同顶点之间有两个方向相反的弧, 所以每个顶点的入度和出度都为 $n - 1$ 。

例题 1: 若无向完全图 K_n 有 45 条边, 求 n 。

解答

完全图 K_n 的边数为

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

由题意

$$\frac{n(n-1)}{2} = 45,$$

所以 $n(n-1) = 90$, 解得

$$n = 10.$$

例题 2: n 阶有向完全图的每个结点的入度是多少?

解答

1. 有向完全图中, 任意两个不同顶点 u, v 之间同时有弧 $u \rightarrow v$ 和 $v \rightarrow u$ 。
2. 固定一个顶点 v , 其余 $n - 1$ 个顶点都各有一条弧指向 v 。

所以

$$d^-(v) = n - 1.$$

同理, 每个顶点的出度也是 $n - 1$ 。

例题 3: 设图 G 是 n 阶简单图, 若 $\delta(G) = n - 1$, 求 $\Delta(G)$ 。

解答

1. n 阶简单图中任意顶点最多与其余 $n - 1$ 个顶点相邻, 所以任意顶点度数不超过 $n - 1$ 。
2. 若 $\delta(G) = n - 1$, 说明每个顶点的度数都至少为 $n - 1$ 。
3. 一个顶点度数既不超过 $n - 1$, 又至少为 $n - 1$, 只能等于 $n - 1$ 。

因此每个顶点度数都等于 $n - 1$, 故

$$\Delta(G) = n - 1.$$

例题 4: 图 G 有 10 条边, 4 个 3 度顶点, 其余顶点度数均小于等于 2, 判断“ G 最多 8 个顶点”是否正确。

解答

1. 由握手定理,

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E| = 20.$$

2. 4 个 3 度顶点贡献 12, 其余顶点总度数为 8。
3. 只知道其余顶点度数不超过 2, 不能推出其余顶点最多为 4, 因为还可能存在任意多个 0 度孤立点。

因此“ G 最多 8 个顶点”不正确。若额外规定没有孤立点, 才可进一步估计。

考点 G2: 通路、简单通路、初级通路

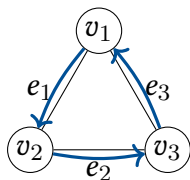
相关知识点

1. **通路**是顶点与边交替出现的序列, 相邻顶点之间必须有对应的边; 题目中出现“道路”时按通路理解。
2. **回路**是起点和终点相同的通路; 开通路的起点和终点不同。
3. **简单通路**要求边不重复; **初级通路**要求顶点不重复。
4. **简单回路**是起点等于终点且边不重复的回路; **初级回路**是除起点与终点相同外, 其余顶点互不相同的回路。
5. 判断“任一通路都是……”这类命题时, 可用重复顶点或重复边构造反例。

例题 1: 已知无向图 G 是由顶点 v_1, v_2, v_3 和边 $e_1 = v_1v_2$, $e_2 = v_2v_3$, $e_3 = v_3v_1$ 构成的三角形。判断

$$P = v_1e_1v_2e_2v_3e_3v_1$$

是否为通路、简单通路、初级通路, 并说明理由。



通路 $v_1v_2v_3v_1$: 边不重复, 顶点 v_1 重复

解答

由图可知, P 中相邻顶点之间依次有边 e_1, e_2, e_3 相连, 所以 P 是一条从 v_1 到 v_1 的通路。

边 e_1, e_2, e_3 各出现一次, 没有重复边, 所以 P 是简单通路。

顶点 v_1 同时作为起点和终点出现, 顶点发生重复, 所以 P 不是初级通路。

例题 2: 判断“图 G 中的任一通路都是简单通路或者初级通路”是否正确。

解答

1. 通路允许重复边或重复顶点。
2. 简单通路、初级通路都有额外“不重复”限制。

3. 构造反例:在有边 v_1v_2 的无向图中,

$$v_1v_2v_1v_2$$

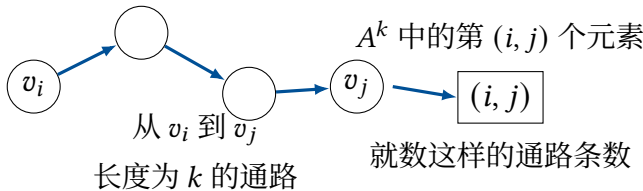
是一条通路。

这条通路重复使用顶点,也重复使用边,因此既不是初级通路,也不是简单通路。原命题不正确。

考点 G3:邻接矩阵幂与通路、回路计数

相关知识点

1. 邻接矩阵 A 中, a_{ij} 表示从 v_i 到 v_j 的边数;简单有向图中只取 0 或 1。
2. A^k 的第 (i, j) 个元素表示从 v_i 到 v_j 长度为 k 的通路条数。
3. A^k 的对角线元素表示从某顶点出发又回到自身的长度为 k 的回路条数。
4. 长度为 k 的通路总数要把 A^k 中所有元素相加。
5. 长度为 k 的回路总数只把 A^k 的对角线元素相加, 即 $\text{tr}(A^k)$ 。
6. 长度小于等于 2 的回路总数为 $\text{tr}(A) + \text{tr}(A^2)$; 长度小于等于 2 的通路总数为 $A + A^2$ 的全体元素之和。



矩阵中看哪里	图上数什么	记忆方式
a_{ij}	$v_i \rightarrow v_j$ 的边数	A 数一步
$(A^k)_{ij}$	$v_i \rightarrow v_j$ 的长度为 k 的通路条数	A^k 数 k 步
$(A^k)_{ii}$	$v_i \rightarrow v_i$ 的长度为 k 的回路条数	对角线表示回到自己
$\sum_{i,j} (A^k)_{ij}$	长度为 k 的通路总数	把全矩阵全部相加
$\text{tr}(A^k)$	长度为 k 的回路总数	只把对角线相加

例题 1: 若邻接矩阵为 M , 说明 $\text{tr}(M^3)$ 的图论含义。

解答

M^3 的第 (i, i) 个元素表示从顶点 v_i 出发, 经过长度为 3 的通路后回到 v_i 的条数。对角线元素相加后,

$$\text{tr}(M^3)$$

表示图中长度为 3 的回路总数。

例题 2: 若邻接矩阵 A 满足

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

则长度为 2 的回路共有多少条?

解答

长度为 2 的回路总数为

$$\text{tr}(A^2).$$

因此

$$\text{tr}(A^2) = 2 + 3 = 5.$$

例题 3: 设有向图 G 的邻接矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

求长度小于或等于 2 的回路条数。

解答

按邻接矩阵幂的性质, 长度小于或等于 2 的回路条数为

$$\text{tr}(A) + \text{tr}(A^2).$$

先看长度为 1 的回路:

$$\text{tr}(A) = 1 + 0 + 0 + 0 = 1.$$

再计算

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

所以长度为 2 的回路条数为

$$\text{tr}(A^2) = 1 + 0 + 2 + 2 = 5.$$

因此长度小于或等于 2 的回路共有

$$1 + 5 = 6$$

条。

例题 4: 给定有向图邻接矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

求长度小于或等于 2 的回路条数。

解答

长度为 1 的回路数为

$$\text{tr}(A) = 1 + 0 + 0 = 1.$$

先算

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

长度为 2 的回路数为

$$\text{tr}(A^2) = 1 + 0 + 0 = 1.$$

所以长度小于或等于 2 的回路条数为

$$\text{tr}(A) + \text{tr}(A^2) = 2.$$

考点 G4:完全图的非同构生成子图

相关知识

1. 完全图 K_n 有 n 个顶点, 任意两不同顶点之间都有一条边, 共有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 条边。
2. 生成子图必须保留原图全部顶点, 只能删除边, 不能删除顶点。
3. 非同构图的判断不能依赖顶点名称; 顶点重新标号后若结构相同, 则仍是同构。
4. 常用同构不变量包括边数、度数序列、连通分支数、是否有圈、三角形个数。
5. 若题目要求枚举, 可统一按以下步骤处理:

边数拆分到连通分支 $\Rightarrow$ 列出每个分支形状
 $\Rightarrow$ 补孤立点到 n 个顶点 $\Rightarrow$ 画代表图并用不变量查重

例题 1: 已知无向图 K_4 , 画出含 2 条边的非同构生成子图。

解答

1. 先保留全部顶点: 这是 K_4 的生成子图, 所以最终必须有 4 个顶点。
2. 把 2 条边拆分到连通分支中:

$$2, \quad 1 + 1.$$

3. 分支形状分别为

$$P_3, \quad P_2 + P_2.$$

4. 补足到 4 个顶点, 得到

$$P_3 + K_1, \quad P_2 + P_2.$$

因此共有两种非同构生成子图:



第一种度数序列为 2, 1, 1, 0, 第二种度数序列为 1, 1, 1, 1, 所以两者不同构; 边数拆分只有 2 与 1 + 1 两类, 因此没有第三种情况。

例题 2: 已知无向图 K_6 , 画出含 3 条边的非同构生成子图。

解答

1. 先保留全部顶点:这是 K_6 的生成子图,所以最终必须有 6 个顶点。

2. 把 3 条边拆分到连通分支中:

$$3, \quad 2+1, \quad 1+1+1.$$

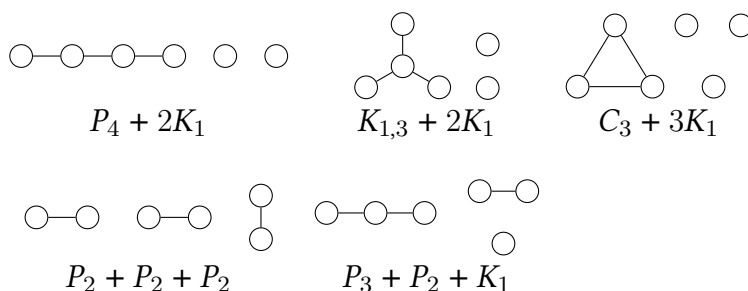
3. 分支形状分别为

$$P_4, \quad K_{1,3}, \quad C_3; \quad P_3 + P_2; \quad P_2 + P_2 + P_2.$$

4. 补足到 6 个顶点,得到

$$P_4 + 2K_1, \quad K_{1,3} + 2K_1, \quad C_3 + 3K_1, \quad P_3 + P_2 + K_1, \quad P_2 + P_2 + P_2.$$

因此共有 5 种非同构类型:



其中 P_4 表示一条含 3 条边的通路, $K_{1,3}$ 表示三条边共用一个中心顶点, C_3 表示三角形, P_2 表示一条孤立边。

这 5 种图可用连通分支结构区分: 分别是 4 个顶点的链、三边星形、三角形、三条互不相邻的边, 以及一条两边链加一条独立边。因此它们两两不同构。

考点 G5:Dijkstra 最短路径

相关知识点

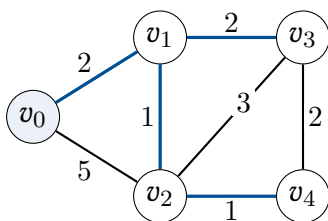
1. **Dijkstra 算法**用于边权非负的最短路径问题;若存在负权边,不能直接使用。
2. **初始化**时,起点距离为 0,与起点相邻的顶点距离为对应边权,其余顶点为 ∞ 。
3. 每一轮选取未确定顶点中**暂定距离最小者**,将其标记为确定。
4. 用新确定顶点更新其邻点:若 $d(u) + w(u, v) < d(v)$,则更新 $d(v)$ 和前驱点。
5. **标号表**中,记号 $(d, p)^*$ 表示距离 d 已确定、前驱为 p 。
6. 若题目要求写出最短路径,必须记录前驱点;只写最短距离不完整。
7. 若两个顶点暂定距离相同,可任选其一先确定,最终距离不受影响。

例题 1:Dijkstra 算法能否直接用于含负权边的图?

解答

1. 不能直接用于含负权边的图。
2. Dijkstra 的关键假设是:一旦某个顶点成为当前最小暂定距离顶点,它的最短距离就可以确定。
3. 若存在负权边,后续路径可能通过负权边把已确定顶点的距离变小,从而破坏这个假设。

例题 2:无向带权图的边为 $v_0v_1(2), v_0v_2(5), v_1v_2(1), v_1v_3(2), v_2v_3(3), v_2v_4(1), v_3v_4(2)$ 。用 Dijkstra 算法求 v_0 到各顶点的最短距离。



蓝色边给出从 v_0 出发的一组最短路径树

解答

标号表如下。表中 (d, p) 表示当前从 v_0 到该顶点的暂定距离为 d , 前驱为 p ; 带 * 表示该顶点已确定。

轮次	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
1	$(0, \lambda)^*$	$(+\infty, \lambda)$	$(+\infty, \lambda)$	$(+\infty, \lambda)$	$(+\infty, \lambda)$
2		$(2, v_0)^*$	$(5, v_0)$	$(+\infty, \lambda)$	$(+\infty, \lambda)$
3			$(3, v_1)^*$	$(4, v_1)$	$(+\infty, \lambda)$
4				$(4, v_1)^*$	$(4, v_2)$
5					$(4, v_2)^*$

因此最短距离为

$$d(v_0) = 0, \quad d(v_1) = 2, \quad d(v_2) = 3, \quad d(v_3) = 4, \quad d(v_4) = 4.$$

由前驱回溯, 得到一组最短路径:

$$v_0 \rightarrow v_1, \quad v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2, \quad v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_3, \quad v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_4.$$

例题 3: 给定非负权图, 写出从起点开始每一轮确定的顶点顺序。

解答

1. Dijkstra 每轮确定当前暂定距离最小且未确定的顶点。
2. 以上一题中, 先后确定 v_0, v_1, v_2 。
3. 最后 v_3 与 v_4 的最短距离同为 4, 二者先后不影响最终结果。

因此确定顺序可以为

$$v_0, v_1, v_2, v_3, v_4$$

或

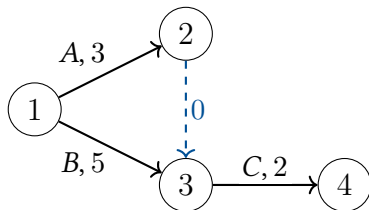
$$v_0, v_1, v_2, v_4, v_3,$$

考点 G6: AOE 网络与关键路径

相关知识点

1. AOE 网络中, 顶点表示事件, 箭线表示活动, 箭线权值表示活动持续时间。
2. 虚活动持续时间为 0, 只用于表达先后依赖关系。
3. 事件最早发生时间 ES 用正向计算: 某事件的 ES 等于所有前驱事件完成时间的最大值。
4. 事件最晚发生时间 LF 用逆向计算: 从终点工期开始, 向前取所有后继约束的最小值。
5. 活动 $e = \langle i, j \rangle$ 的松弛时间为 $SL(e) = LS(e) - ES(e) = LF(e) - EF(e)$ 。
6. 关键路径计算包括事件时间表与活动时间表; 松弛时间为 0 的活动为关键活动。
7. 松弛时间 $SL = 0$ 的活动是关键活动; 关键活动首尾相接形成关键路径。
8. 关键路径长度等于项目最短完成工期。

例题 1: 某 AOE 网络中, 活动 $A: 1 \rightarrow 2(3)$ 与活动 $B: 1 \rightarrow 3(5)$ 同时开始, 活动 C 必须在 A 和 B 都完成后才能开始。若用活动 $C: 3 \rightarrow 4(2)$ 表示后续任务, 应如何加入虚活动?



虚活动 $2 \rightarrow 3(0)$ 不耗时, 只表示 C 还要等待 A 完成

解答

1. 加入虚活动

$$2 \rightarrow 3(0).$$

2. 活动 B 完成后到达事件 3; 活动 A 完成后通过虚活动也约束到事件 3。
3. 因此从事件 3 出发的活动 C 必须等 A 和 B 都完成后才能开始。
4. 虚活动的持续时间为 0, 不增加项目工期, 只表达先后依赖关系。

例题 2: 某 AOE 网络中, 活动 X 的 $ES = 3$, 持续时间为 4, $LF = 9$ 。求活动 X 的松弛时间, 并判断它是否为关键活动。

解答

1. 活动松弛时间计算公式为

$$SL = LF - ES - t.$$

2. 代入 $LF = 9, ES = 3, t = 4$:

$$SL = 9 - 3 - 4 = 2.$$

3. 松弛时间不为 0, 所以活动 X 不是关键活动。

例题 3: 若某活动松弛时间 $SL = 0$, 判断它是否为关键活动。

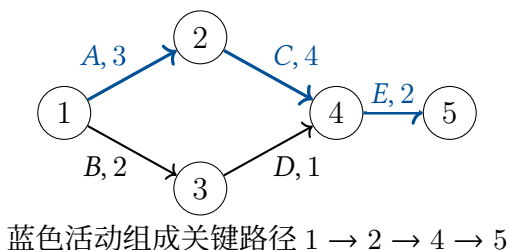
解答

1. 是关键活动。

2. 松弛时间 $SL = 0$ 表示该活动不能被延误, 否则整个项目工期就会被延长。

3. 松弛时间为 0 的活动是关键活动; 关键活动首尾相接形成从源点到汇点的关键路径。

例题 4: AOE 网络活动为 $A: 1 \rightarrow 2(3), B: 1 \rightarrow 3(2), C: 2 \rightarrow 4(4), D: 3 \rightarrow 4(1), E: 4 \rightarrow 5(2)$ 。求关键路径和项目工期。



解答

事件时间表如下。正向求 ES , 逆向求 LF :

事件	1	2	3	4	5
ES	0	3	2	7	9
LF	0	3	6	7	9

其中

$$ES(4) = \max\{3 + 4, 2 + 1\} = 7, \quad LF(1) = \min\{3 - 3, 6 - 2\} = 0.$$

再列活动时间表。这里

$$ES(e) = ES(i), \quad EF(e) = ES(e) + t, \quad LF(e) = LF(j), \quad LS(e) = LF(e) - t, \quad SL = LS - ES.$$

活动	弧	ES	EF	LS	LF	SL
A	$1 \rightarrow 2(3)$	0	3	0	3	0
B	$1 \rightarrow 3(2)$	0	2	4	6	4
C	$2 \rightarrow 4(4)$	3	7	3	7	0
D	$3 \rightarrow 4(1)$	2	3	6	7	4
E	$4 \rightarrow 5(2)$	7	9	7	9	0

由活动时间表可见, $SL = 0$ 的关键活动为 A, C, E 。因此关键路径为

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5,$$

项目工期为 9。

5 考前检查清单

- 能按三大篇识别题型。
- 会判断命题并符号化。
- 会列真值表求主范式。
- 会找量词辖域。
- 会做前束范式。
- 会写推理证明步骤。
- 会计算幂集与关系个数。
- 会由关系图写关系矩阵。
- 会由关系矩阵画关系图。
- 会写关系复合。
- 会画复合后的关系图。
- 会判断等价/偏序。
- 会由偏序矩阵画哈斯图。
- 会区分最大元与极大元。
- 会用握手定理。
- 会用邻接矩阵幂数回路。
- 会判别完全图生成子图是否同构。
- 会跑 Dijkstra。
- 会画 AOE 网并求关键路径。