

第 1 章：行列式复习讲义学生版

MatNoble

课程主页: <https://matnoble.top/courses/economic-math-2>

目录

1. 余子式、代数余子式与按行列展开
2. 行列式的线性性质与列变换
3. 特殊行列式：Vandermonde 型与同结构行列式
4. 特殊形状：行和或列和相等
5. 特殊形状：箭形与边框型
6. 分块三角行列式

本章定位

行列式章节的核心不是机械展开，而是识别结构并选择合适工具。常用工具包括行列式性质、余子式与代数余子式、特殊行列式和分块行列式。

考点：余子式、代数余子式与按行列展开

知识点 余子式 M_{ij} 是划去第 i 行第 j 列后得到的行列式；代数余子式 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ 。按第 i 行展开时，

$$D = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij}.$$

当关注对象是“余子式之和”，不要误用代数余子式。

典型例题

设

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

目标：确定第 1 行各元素余子式之和。

例题变式

设

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

目标：确定第 1 行第 1、3、4 个元素对应的代数余子式之和。

考点：行列式的线性性质与列变换

知识点 行列式对某一行或某一列具有线性性。常见结构是把新矩阵的列向量写成旧矩阵列向量的线性组合，再把新矩阵写成

$$B = AC,$$

从而 $|B| = |A||C|$ 。

典型例题

设 $|A| = -1$ ，且

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3).$$

目标：确定

$$|\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3|.$$

例题变式

设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 且 $|A| = 3$ 。目标：确定

$$|2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_3, \alpha_2 + 2\alpha_3|.$$

考点：特殊行列式：Vandermonde 型与同结构行列式

知识点 Vandermonde 行列式的标准形为

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

识别出 x_i 后直接代入，比展开更稳定。

典型例题

计算

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 9 & 4 & 1 \\ 1 & 27 & 8 & -1 \end{vmatrix}.$$

例题变式

计算

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

考点：特殊形状：行和或列和相等

知识点 当行列式每一行元素之和相等，或每一列元素之和相等时，常用“把若干行（列）加到一行（列）”的方式先提出行和因子，再用行差或列差构造零元素。对于“主对角元素相同、非对角元素相同”的结构，应重点识别行和与两行之差中出现的公共因子。

典型例题

计算

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}_{n \times n}.$$

例题变式

计算

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

考点：特殊形状：箭形与边框型

知识点 箭形或边框型行列式通常只有第一行、第一列以及主对角线位置较密集。处理时先观察内部对角元素是否非零；若可作除法，则用对应行或列消去边框上的元素，将原式化为三角结构。若存在零参数，则应改用按行列展开或分情况讨论。

典型例题

计算

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}, \quad a_i \neq 0 \ (i = 2, \dots, n).$$

例题变式

计算

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}.$$

考点：分块三角行列式

知识点 若分块矩阵为

$$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}$$

或

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix},$$

则其行列式等于 $|A||B|$ 。

对于一般的副对角分块矩阵

$$M = \begin{pmatrix} O_{m \times n} & A_{m \times m} \\ B_{n \times n} & O_{n \times m} \end{pmatrix},$$

其中 A 为 m 阶方阵， B 为 n 阶方阵，两者不必同阶。交换宽度分别为 n 和 m 的两组分块列，需要进行 mn 次列交换，因此

$$|M| = (-1)^{mn} |A||B|.$$

典型例题

计算

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

例题变式

设 $|A| = 2, |B| = -3$, 其中 A, B 均为三阶矩阵, 关注

$$\begin{vmatrix} A & O \\ C & 2B \end{vmatrix}.$$

例题变式

设 P, Q 均为三阶矩阵, 且

$$|P| = -2, \quad |Q| = 5.$$

确定

$$D = \begin{vmatrix} O & P \\ Q & O \end{vmatrix}.$$

例题变式

设 A 为二阶方阵, B 为三阶方阵, 且

$$|A| = -2, \quad |B| = 4.$$

确定

$$D = \begin{vmatrix} O_{2 \times 3} & A \\ B & O_{3 \times 2} \end{vmatrix}.$$