

第 2 章：矩阵及其运算复习讲义学生版

MatNoble

课程主页: <https://matnoble.top/courses/economic-math-2>

目录

1. 矩阵运算律与常见误区
2. 伴随矩阵与逆矩阵
3. 分块矩阵的逆
4. 矩阵方程

本章定位

矩阵运算的重点是运算顺序、可逆性条件和分块结构。复习时要特别注意：矩阵乘法一般不可交换，逆矩阵乘积要反序，分块矩阵要先看块的位置。

考点：矩阵运算律与常见误区

知识点 矩阵转置满足

$$(A + B)^T = A^T + B^T, \quad (AB)^T = B^T A^T.$$

若 A, B 可逆，则

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}.$$

注意反序。

典型例题

下列矩阵恒等式的正误辨析:

$$(A) \quad (AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1},$$

$$(B) \quad (A+B)^T = A^T + B^T,$$

$$(C) \quad AB = O \Rightarrow A = O \text{ 或 } B = O,$$

$$(D) \quad (AB)^k = B^k A^k.$$

例题变式

若 A, B 均可逆, 化简

$$(ABA^{-1})^{-1}.$$

考点: 伴随矩阵与逆矩阵

知识点 若 A 可逆, 则

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*, \quad AA^* = A^*A = |A|E.$$

遇到由矩阵方程推出逆矩阵的题, 常把方程整理为 $AB = cE$ 。

典型例题

已知方阵 A 满足

$$A^2 - 2A + 3E = O,$$

目标: 给出 A^{-1} 。

例题变式

已知方阵 A 满足

$$A^2 - A + 2E = O,$$

目标：给出 A^{-1} 。

典型例题

已知

$$|A| = 2, \quad A \text{ 为三阶可逆矩阵.}$$

关注 $(\frac{1}{2}A)^{-1} - 2A^*$ 与 A^* 的关系。

例题变式

已知

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

目标：给出 A^{-1} 。

考点：分块矩阵的逆

知识点 对于

$$M = \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix},$$

若 A, B 均可逆, 可先设逆矩阵为同型的反对角分块矩阵, 再通过 $MN = E$ 确定两个非零分块。分块乘法中必须保留乘法顺序, 不能凭位置直接猜测。

典型例题

分析

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & A^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}$$

是否正确。

例题变式

设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

目标：给出

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1}.$$

典型例题

设

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & B \\ C & O \end{pmatrix},$$

其中

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

求 $|M^{10}|$ 和 M^{-1} 。

考点：矩阵方程

知识点 解矩阵方程时，先把未知矩阵集中到一侧，再分析能否左乘或右乘逆矩阵。矩阵乘法不可交换，因此必须保留因子的左右顺序。

典型例题

设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

且 $AX + E = A^2 + X$ ，目标是确定 X 。

例题变式

设 A 可逆, 且

$$AX - 2X = A.$$

若 $A - 2E$ 可逆, 目标是确定 X 。

典型例题

已知矩阵 A 和 B 满足

$$AB = A + 2B, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

目标: 确定 B 。