

第3章：矩阵的初等变换与线性方程组复习讲义学生版

MatNoble

课程主页: <https://matnoble.top/courses/economic-math-2>

目录

1. 齐次线性方程组的非零解判定
2. 非齐次线性方程组的秩判别
3. 行满秩矩阵与非齐次方程组

本章定位

本章关注用初等变换分析线性方程组的相容性、解的个数与通解结构。核心工具是系数矩阵、增广矩阵、阶梯形和秩。

考点：齐次线性方程组的非零解判定

知识点 齐次方程组 $AX = 0$ 一定有零解。若未知量个数等于方程个数，非零解存在的充要条件是

$$|A| = 0.$$

更一般地，若未知量个数为 n ，则有非零解的充要条件是 $R(A) < n$ 。

典型例题

方程组

$$\begin{cases} kx + y - 2z = 0, \\ x + ky + 2z = 0, \\ kx + y + kz = 0 \end{cases}$$

当 k 为何值时有非零解？

例题变式

方程组

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x + ay + z = 0, \\ x + y + az = 0 \end{cases}$$

当 a 为何值时有非零解?

考点：非齐次线性方程组的秩判别

知识点 对于 $AX = b$:

$$R(A) < R(A, b) \Rightarrow \text{无解};$$

$$R(A) = R(A, b) = n \Rightarrow \text{唯一解};$$

$$R(A) = R(A, b) < n \Rightarrow \text{无穷多解}.$$

这里 n 是未知量个数。

典型例题

参数 λ 对方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

解的个数与通解结构的影响。

例题变式

讨论方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + ax_3 = 1, \\ 2x_1 + (a+1)x_2 + (a+1)x_3 = 2, \\ (a+2)x_1 + 3x_2 + (2a+1)x_3 = 3 \end{cases}$$

的解的分类及无穷多解时的通解结构。

考点：矮胖型矩阵、行满秩与非齐次方程组

知识点 当 A 是 $m \times n$ 矩阵且 $m < n$ 时，称其为“矮胖型”矩阵：方程数少于未知量数。但“矮胖”本身不能保证 $AX = \mathbf{b}$ 对任意 $\mathbf{b}$ 有解，还必须满足

$$R(A) = m,$$

即 A 行满秩。此时 A 的列向量张成 $\mathbb{R}^m$ ，线性映射 $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ 是满射。因而对任意 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ ，都有

$$R(A) = R(A, \mathbf{b}) = m,$$

故非齐次方程组一定有解。又因为

$$n - R(A) = n - m > 0,$$

自由变量有 $n - m$ 个，所以对任意 $\mathbf{b}$ 都有无穷多解。其通解结构为

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + k_1 \boldsymbol{\xi}_1 + \cdots + k_{n-m} \boldsymbol{\xi}_{n-m},$$

其中 $\mathbf{x}_0$ 是一个特解， $\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_{n-m}$ 是 $AX = 0$ 的一组基础解系。

典型例题

设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

确定 $AX = \mathbf{b}$ 的解的情况，并写出通解。

例题变式

若 A 是 3×5 矩阵，且 $R(A) = 3$ ，则 $AX = \mathbf{b}$ 是否一定有解？若有解，解是否唯一？

例题变式

设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

判断 $AX = \mathbf{b}$ 是否对任意二维向量 $\mathbf{b}$ 都有解。